

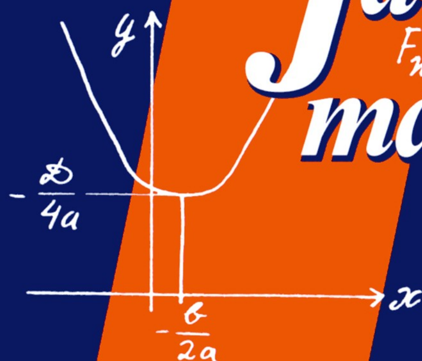
$$xf(x)+2f(1-x)=x^2+6$$

$$\sqrt{x^2+(8-y)^2}+\sqrt{y^2+(6-x)^2}$$

Jaunajam matematikui

$$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{AC}$$



LIETUVOS
JAUNŲJŲ
MATEMATIKŲ
MOKYKLA
LJMM

$$f(x)=|x-1|+|x+1|$$

$$\pi^2(k+1)^2-\pi^2k^2=\pi^2(2k+1)$$

$$1=4\sin\frac{\pi}{10}\left[1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right].$$

$$m_3=m_{12}+m_{13}+m_{23}$$

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

10

2007–2009 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danieliaus leidykla

Vilnius, 2009

UDK 51(076)
Ja712

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

Maketavo Kristina LYNDIENĖ

ISBN 978-9955-476-70-2

TURINYS

PRATARMĖ 4
METODINĖ MEDŽIAGA IR UŽDUOTYS 5
A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas. STOJAMOJI UŽDUOTIS 6
I. **A. Apynis, E. Stankus.** RACIONALIOSIOS LYGTYS 8
PIRMOJI UŽDUOTIS 15
II. **A. Urbonas.** NESTANDARTINIAI UŽDAVINIAI 17
ANTROJI UŽDUOTIS 22
III. **V. Pekarskas.** TRIGONOMETRINIŲ KEITINIŲ TAIKYMAS
SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS 23
TREČIOJI UŽDUOTIS 32
IV. **A. Apynis.** NELYGYBĖS TEKSTINIUOSE UŽDAVINIUOSE 34
KETVIRTOJI UŽDUOTIS 39
V. **J. Šinkūnas.** KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI IR JŲ TAIKYMAS 41
PENKTOJI UŽDUOTIS 61
VI. **E. Mazėtis.** KAI KURIOS PLANIMETRIJOS TEOREMOS
IR JŲ TAIKYMAI 63
ŠEŠTOJI UŽDUOTIS 73
VII. **E. Stankus.** BERNULIO FORMULĖ IR JOS TAIKYMAS 75
SEPTINTOJI UŽDUOTIS 85
VIII. **E. Mazėtis.** BRIAUNAINIAI 87
AŠTUNTOJI UŽDUOTIS 98
A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas. BAIGIAMOJI UŽDUOTIS .. 100

UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI 101
Stojamosios užduoties sprendimas 102
Pirmosios užduoties sprendimas 104
Antrosios užduoties sprendimas 110
Trečiosios užduoties sprendimas 115
Ketvirtosios užduoties sprendimas 122
Penktosios užduoties sprendimas 127
Šeštosios užduoties sprendimas 134
Septintosios užduoties sprendimas 138
Aštuntosios užduoties sprendimas 141
Baigiamosios užduoties atsakymai 148

PRATARMĖ

Šioje dešimtojoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2007–2009 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: racionaliosios lygtys (A. Apynis, E. Stankus), nestandartiniai uždaviniai (A. Urbonas), trigonometrinių keitinių taikymas sprendžiant uždavinius (V. Pekarskas), nelygybės tekstiniuose uždaviniuose (A. Apynis), kompleksiniai skaičiai ir jų taikymas (J. Šinkūnas), kai kurios planimetrijos teoremos ir jų taikymai (E. Mazėtis), Bernulio formulė ir jos taikymas (E. Stankus), briaunainiai (E. Mazėtis). Skaitytojas taip pat ras 2007 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2009 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių devynerių LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Nuoširdžiai dėkojame straipsnių autoriams, redaktorei Joanai Pribušauskaitei ir kolegei Kristinai Lyndienei už nuoširdų darbą leidžiant knygelę.

Antanas Apynis,
Eugenijus Stankus,
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys



STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Natūralieji skaičiai nuo 1 iki 99999 surašyti iš eilės. Raskite gauto skaičiaus-milžino 123... 91011... 99999 skaitmenų sumą.

2. Nubraukus pirmąjį natūraliojo keturženklio skaičiaus skaitmenį, gaunamas 57 kartus mažesnis triženklis skaičius. Raskite šį keturženklį skaičių.

3. Raskite tokius tris pirminius skaičius, iš kurių vienas yra lygus kitų dviejų skaičių kubų skirtumui.

4. Raskite visas realiųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, tenkinančias lygybę

$$x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0.$$

5. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)(x-2)^2}{3-x} > 0, \\ \dfrac{2}{3-x} > 1. \end{cases}$$

6. Rengdamiesi naujametiniam karnavalui, pirmokai Ugnė, Naglis ir Miglė vienodo didumo lapuose piešė snaiges (viename lape galima nupiešti ne daugiau kaip 5 snaiges). Stropusis Naglis nupiešė daugiau snaigių negu Ugnė ir Miglė kartu, bet sunaudojo mažiau popieriaus lapų ir už Ugnę, ir už Miglę. Ugnė nupiešė mažiausiai snaigių, bet sunaudojo daugiau popieriaus lapų negu Miglė ir Naglis kartu. Kiek mažiausiai snaigių galėjo nupiešti Naglis?

7. Į miesto mero postą pretendavo trys kandidatai – Antanaitis, Jonaitis ir Petraitis. Pasibaigus rinkiminei kampanijai, kiekvienas rinkėjas galutinai apsisprendė ir tapo kurio nors pretendento šalininku. Jei į rinkimus būtų atvykę visi rinkėjai, tai jų balsai būtų pasiskirstę santykiu 1:2:1. Tačiau rinkimuose dalyvavo tik 60 % rinkėjų; jų balsai pasiskirstė santykiu 5:5:6. Kiek procentų kiekvieno kandidato šalininkų nedalyvavo rinkimuose?

8. Įrodykite, kad $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$.

9. Trikampio ABC kraštinių ilgiai yra: $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Atkarpos BM ir AE yra šio trikampio pusiaukampinės. Raskite trikampių ABC ir BME plotų santykį.

10. Smailiojo trikampio ABC aukštinės susikerta taške O. Raskite kampo C didumą, jei $OC = AB$.



I. RACIONALIOSIOS LYGTYS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Sprendžiant matematikos uždavinius yra randama įvairių reiškinių. Vienais iš paprastesnių laikomi sveikieji ir racionalieji reiškiniai.

Sveikuoju reiškiniu yra vadinamas daugianaris

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

kurio visi koeficientai ir kintamasis x – realieji skaičiai, $a_n \neq 0$; natūralusis skaičius n yra vadinamas *daugianario laipsniu.* Atkreipkime dėmesį, kad pirmojo laipsnio daugianaris $P(x) = a_1 x + a_0$ vadinamas *tiesiniu reiškiniu*, o antrojo laipsnio daugianaris $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – *kvadratiniu trinariu.*

Trupmena $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kurios skaitiklis $P(x)$ ir vardiklis $Q(x)$ yra sveikieji reiškiniai, vadinama *racionaliuoju reiškiniu.*

Lygtys, sudarytos iš sveikųjų, ir (arba) racionaliųjų reiškinių vadinamos *racionaliosiomis lygtimis*. Pavyzdžiui, lygtys

$$2x + 5 = 7x - 2 , \quad ax^2 + bx + c = 0 , \quad 9x^3 + ax^2 = b , \quad \frac{2x-3}{x-2} - 5x = \frac{1}{x}$$

yra racionaliosios, tačiau pirmoji lygtis dažniau vadinama *tiesine* lygtimi, antroji – *kvadratine*, trečioji – *kubine*, ir tik ketvirtoji – *racionalioji.*

Bet kurią racionaliąją lygtį galima pertvarkyti į ekvivalenčią jai lygtį

$$P(x) = 0 \text{ arba } \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 ;$$

čia $P(x)$ ir $Q(x)$ yra sveikieji reiškiniai. Prisiminkime, kad dvi lygtys vadinamos *ekvivalenčiomis*, jei jos turi tuos pačius sprendinius; lygtys, neturinčios sprendinių – taip pat ekvivalenčios.

Racionaliosios lygties $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ sprendimą galima nusakyti taip: iš pradžių reikia rasti lygties $P(x) = 0$ sprendinius, o paskui atrinkti tuos, kurie tenkina nelygybę $Q(x) \neq 0$ – jie ir bus šios lygties sprendiniai.

Kitaip tariant, pradinė lygtis yra pakeičiama sistema

$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Žinoma, sunkiausia rasti lygties $P(x) = 0$ sprendinius. Tam tinka įvairūs metodai. Pavyzdžiui, tiesinės lygties sprendinius galima apskaičiuoti tiesiogiai, o kvadratinės lygties – pagal kvadratinės lygties sprendinių formules. Kvadratinę lygtį taip pat nesunku išspręsti išskiriant pilną dvinario kvadratą arba lygties kairiąją pusę išskaidant *tiesiniais dauginamaisiais*. Skaidymo dauginamaisiais metodas yra labai parankus aukštesnio laipsnio lygtims spręsti. Taikant šį metodą daugianaris $P(x)$ yra išskaidomas kurių nors daugianarių $P_1(x), P_2(x), ..., P_k(x)$ sandauga, o lygtis $P(x) = 0$ pakeičiama ekvivalenčia lygtimi

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot ... \cdot P_k(x) = 0 .$$

Tuomet lygties $P(x) = 0$ sprendinių aibė, tarkime, X būtų k lygčių $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, ..., $P_k(x) = 0$ sprendinių aibių $X_1, X_2, ..., X_k$ sąjunga: $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k$.

Kartais sprendžiant lygtį $P(x) = 0$ yra prasminga *pakeisti nežinomąjį*. Taikant nežinomojo keitimo metodą, kuris nors reiškinys su nežinomuoju x pažymimas nauju kintamuoju (nežinomuoju) dydžiu (sakykime, t, u, v) ir gaunama paprastesnė lygtis. Išsprendus šią lygtį, ieškomosios nežinomojo x reikšmės apskaičiuojamos pagal pasirinkto keitinio formulę.

Išsamiau su racionaliųjų lygčių sprendimo būdais susipažinkime nagrinėdami konkrečius uždavinius.

1 pavyzdys. Nustatykime, ar ekvivalenčios lygtys $x^3 - x = 0$ ir $\frac{x^2 - x^4}{x} = 0.$

Sprendimas Lygtys nėra ekvivalenčios, nes pirmosios lygties sprendinių aibė yra $\{-1; 0; 1\}$, o antrosios – $\{-1; 1\}$.

Ats.: Ne.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $ax + a = a^2$, kurioje x – nežinomasis, a – parametras.

Sprendimas. Tai – tiesinė lygtis su parametru. Vadinasi, turime rasti lygties sprendinius su visomis galimomis parametro a reikšmėmis:

$$ax + a = a^2 \Leftrightarrow ax = a^2 - a \Leftrightarrow ax = a(a-1).$$

Paanalizuokime atskirus atvejus: kai $a = 0$, tai gauname lygtį $0 \cdot x = 0$, kurios sprendiniai yra visi realieji skaičiai; kai $a \neq 0$, gauname $x = a - 1$.

Ats.: Jei $a = 0$, tai $x = t$, $t \in \mathrm{R}$; jei $a \neq 0$, tai $x = a - 1$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{5}{(x+2)(x-3)}.$$

Sprendimas.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{5}{(x+2)(x-3)} \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-3} - \frac{5}{(x+2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x+2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ (x+2)(x-3) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ arba } x = 3, \\ x \neq -2 \text{ ir } x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1.$$

Ats.: $x = -1$.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį $x^3 + 4x^2 - 36x - 144 = 0$.

Sprendimas. Ši lygtis lengvai sprendžiama jos kairiąją pusę išskaidant dauginamaisiais:

$$x^3 + 4x^2 - 36x - 144 = (x^3 - 36x) + (4x^2 - 144) =$$
$$= x(x^2 - 36) + 4(x^2 - 36) = (x^2 - 36)(x + 4).$$

Nagrinėjamą lygtį pakeiskime ekvivalenčia lygtimi

$$(x^2 - 36)(x + 4) = 0.$$

Jos sprendinių aibė yra lygčių $x^2 - 36 = 0$ ir $x + 4 = 0$ sprendinių aibių (atitinkamai $\{-6; 6\}$ ir $\{-4\}$ sąjunga – aibė $\{-6; -4; 6\}$.

Ats.: $\{-6; 6; -4\}$.

Šiame pavyzdyje daugianarį $P(x) = x^3 + 4x^2 - 36x - 144$ išskaidėme grupuodami jo dėmenis. Tačiau ne visada lengva pasirinkti grupavimo planą. Todėl pravartu susipažinti ir su kitomis skaidymo galimybėmis. Viena iš paprasčiausių yra daugianario $P(x)$ *dalyba*

kampu iš dvinario $x-a$, kai a yra *daugianario* $P(x)$ šaknis, t. y. tenkina sąlygą $P(a)=0$. Daugianario $P(x)$ dalyba kampu iš vienanario $x-a$ šiek tiek primena gerai žinomą skaičių dalybą kampu, todėl išsamiai ir neaiškinsime, o apsiribosime pavyzdžiais. Padalykime $P(x)=5x^3+7x^2-13x+1$ iš $x-1$:

$$\begin{array}{l|l} \underline{}\,5x^3+7x^2-13x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{5x^3-5x^2} & 5x^2+12x-1 \\ \quad \underline{}\,12x^2-13x+1 & \\ \quad \underline{12x^2-12x} & \\ \qquad\qquad -x+1 & \\ \qquad\qquad \underline{-x+1} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Matome, kad dalybos liekana yra lygi nuliui, todėl $P(x)$ galima išreikšti dvinario $x-1$ ir kvadratinio trinario $5x^2+12x-1$ sandauga:

$$P(x)=5x^3+7x^2-13x+1=(x-1)\ (5x^2+12x-1).$$

Spręsdami lygtį $5x^3+7x^2-13x+1=0$, ją galėtume pakeisti ekvivalenčia lygtimi $(x-1)\ (5x^2+12x-1)=0$; šią lygtį visai nesunku išspręsti – gautume aibę $\left\{1; \frac{-6-\sqrt{41}}{5}; \frac{-6+\sqrt{41}}{5}\right\}$.

Atkreipkime dėmesį, kad ne kiekvieną daugianarį dalijant iš dvinario gaunama lygi nuliui liekana. Štai pavyzdys. Dalydami daugianarį $P(x)=x^3+4x^2+5x-9$ iš dvinario $x-2$, gauname:

$$\begin{array}{l|l} \underline{}\,x^3+4x^2+5x-9 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-2x^2} & x^2+6x+17 \\ \quad \underline{}\,6x^2+5x-9 & \\ \quad \underline{6x^2-12x} & \\ \qquad\quad \underline{}\,17x-9 & \\ \qquad\quad \underline{17x-34} & \\ \qquad\qquad\quad 25 & \end{array}$$

Šios dalybos rezultatą galima užrašyti taip:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 9 = (x-2)\,(x^2 + 6x + 17) + \frac{25}{x-2}.$$

Aišku, kad sprendžiant lygtį $x^3 + 4x^2 + 5x - 9 = 0$ iš tos dalybos nebūtų jokios naudos.

Nesunku įrodyti, kad *daugianaris* $P(x)$ *dalijasi iš vienanario* $(x-a)$ *tik tada, kai* $P(a)=0$ *(t. y. kai a yra daugianario* $P(x)$ *šaknis).*

5 pavyzdys. Išspręskime racionaliąją lygtį

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6. \qquad (1)$$

Sprendimas. Iš pradžių subendravardiklinkime reiškinį

$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6$, o toliau nagrinėkime ekvivalenčią lygtį

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 64x + 39}{x^2 - 4x + 10} = 0.$$

Ji yra ekvivalenti lygčiai $x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 64x + 39 = 0$,

nes $x^2 - 4x + 10 = (x-2)^2 + 6 > 0$.

Spręsdami lygtį $x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 64x + 39 = 0$, taikykime skaidymo dauginamaisiais metodą. Nesunku įsitikinti, kad $x = 1$ yra daugianario $P(x) = x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 64x + 39$ šaknis (nes $P(1) = 0$); todėl $P(x)$ dalykime iš vienanario $(x-1)$:

$$\begin{array}{rl}
-\,x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 64x + 39 & \big|\; x - 1 \\
x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad & \;\; x^3 - 7x^2 + 25x - 39 \\
\hline
-\,-7x^3 + 32x^2 - 64x + 39 & \\
-7x^3 + 7x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
-\,25x^2 - 64x + 39 & \\
25x^2 - 25x \qquad & \\
\hline
-39x + 39 & \\
-39x + 39 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Skaičius 3 yra daugianario $P_1(x)=x^3-7x^2+25x-39$ šaknis ($P_1(3)=0$), todėl šis daugianaris dalijasi iš $(x-3)$. Gausime:

$$\begin{array}{l|l} x^3-7x^2+25x-39 & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-3x^2} & x^2-4x+13 \\ \quad -4x^2+25x-39 & \\ \quad \underline{-4x^2+12x} & \\ \qquad\quad 13x-39 & \\ \qquad\quad \underline{13x-39} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Taigi

$$P(x)=x^4-8x^3+32x^2-64x+39=(x-1)(x-3)(x^2-4x+13).$$

Lygties $x^4-8x^3+32x^2-64x+39=0$ sprendinių aibė sutampa su lygties $(x-1)(x-3)(x^2-4x+13)=0$ sprendinių aibe $\{1;\ 3\}$.

Ats.: $\{1;\ 3\}$.

Komentaras. Matome, kad daugianario $P(x)$ skaidymas dalijant $P(x)$ iš vienanario $(x-a)$ taip pat yra nelengvas, nes reikia atspėti daugianario šaknį a. Kad būtų lengviau, pateiksime dar vieną algebros teiginį: *jeigu daugianaris*

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

su sveikaisiais koeficientais $a_{n-1},...,a_1,a_0$ *turi sveikąją šaknį, tai ji yra laisvojo nario* a_0 *daliklis.*

Pagal šį teiginį tiek daugianario

$$P(x)=x^4-8x^3+32x^2-64x+39,$$

tiek daugianario

$$P_1(x)=x^3-7x^2+25x-39$$

pretendentai į sveikąsias šaknis yra tie patys skaičiai: $\pm 1; \pm 3; \pm 13; \pm 39$.

Nežinomųjų keitimo metodas taip pat reikalauja tam tikro įžvalgumo, nes nėra aiškių „receptų“. Vis dėlto kartais pavyksta taip pakeisti nežinomąjį, kad lygties $P(x)=0$ sprendimas pasidaro gana paprastas. Grįžkime prie (1) lygties, kurią išsprendėme 5 pavyzdyje.

Taigi, taikydami nežinomųjų keitimo metodą, išspręskime lygtį

$$\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6. \qquad (1)$$

Pažymėkime $t=x^2-4x+10$ ir spręskime gautą lygtį

$$\frac{21}{t}-t=-4. \qquad (2)$$

Ji ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} t^2-4t-21=0, \\ t\neq 0, \end{cases}$$

kurios sprendinių aibė yra $\{-3;\ 7\}$.

Kai $t=-3$, sprendžiame kvadratinę lygtį $x^2-4x+10=-3$; kai $t=7$, – kvadratinę lygtį $x^2-4x+10=7$. Pirmosios lygties sprendinių aibė yra tuščia, o antrosios lygties sprendinių aibė yra $\{1;\ 3\}$.

Gavome tą patį atsakymą – (1) lygties sprendinių aibę $\{1;\ 3\}$.

6 pavyzdys. Taikydami nežinomųjų keitimo metodą, išspręskime lygtį

$$\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6. \qquad (3)$$

Sprendimas. Skaičius $x=0$ nėra šios lygties sprendinys, todėl padaliję trupmenų skaitiklius ir vardiklius iš x turėsime ekvivalenčią lygtį

$$\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6.$$

Pažymėkime $t=2x+\frac{3}{x}$ ir gausime lygtį

$$\frac{2}{t-5}+\frac{13}{t+1}=6.$$

Ji yra ekvivalenti lygčiai

$$\frac{2t^2-13t+11}{(t-5)(t+1)}=0, \qquad (4)$$

o ši – sistemai

$$\begin{cases} 2t^2 - 13t + 11 = 0, \\ (t-5)(t+1) \neq 0. \end{cases}$$

Kvadratinė lygtis $2t^2 - 13t + 11 = 0$ turi du sprendinius: 1 ir 5,5. Jie ir sudaro (4) lygties sprendinių aibę $\{1;\ 5{,}5\}$.

Toliau sprendžiame dvi lygtis: $2x + \dfrac{3}{x} = 1$ ir $2x + \dfrac{3}{x} = 5{,}5$. Pirmoji iš jų sprendinių neturi, o antroji turi du sprendinius: 0,75 ir 2. Taigi (3) lygtis turi du sprendinius: 0,75 ir 2.

Ats.: $\{0{,}75;\ 2\}$.

PIRMOJI UŽDUOTIS

Išspręskite šias racionaliąsias lygtis:

1. $x^2(1+x)^2 + x^2 = 8(1+x)^2$.

2. $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2 + \dfrac{x+1}{x-4} = 12\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)^2$.

3. $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 3} + \dfrac{2}{x^2 - 3x + 4} = \dfrac{6}{x^2 - 3x + 5}$.

4. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$.

5. $\dfrac{1}{x+6} - \dfrac{1}{x+9} + \dfrac{1}{x+7} - \dfrac{1}{x+10} = \dfrac{21}{20}$.

6. $\left(\dfrac{3}{(x-2)(x-6)} + 1\right)(x-4)^2 = \dfrac{12}{(x-2)(x-6)}$.

7. $18x^2 + \dfrac{2}{x^2} = 16 - 3x - \dfrac{1}{x}$.

8. $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

9. $\dfrac{x^2+2}{x+2}+\dfrac{x^2+1}{x+1}=\dfrac{2}{(x+1)(x+2)}.$

10. $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}.$



II. NESTANDARTINIAI UŽDAVINIAI

Algimantas Urbonas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Šis pavadinimas – sąlyginis. Iš tikrųjų nėra nestandartinių uždavinių, o yra tik netikėti, originalūs („nestandartiniai“) jų sprendimo būdai.

Šios užduoties uždavinių sprendimas pareikalaus ne tik mokyklinio vadovėlio žinių, bet ir originalesnio sprendimo būdo ieškojimo. Pradžioje, kaip įprasta, pateikiami tokių uždavinių pavyzdžiai su sprendimais, o po to – užduotis.

Pavyzdžiai.

1. Išspręskime lygtį

$$|x|^3 + |x-1|^3 = 9. \qquad (1)$$

Sprendimas. Kadangi x ir $x-1$ keičia ženklus atitinkamai taškuose 0 ir 1, tai sprendinių ieškosime intervaluose $(-\infty; 0)$, $[0; 1]$ ir $(1; +\infty)$.

1) Kai $x \in (-\infty; 0)$, lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$-x^3 - (x-1)^3 = 9 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 3x + 8 = 0.$$

Nesunkiai atspėję sprendinį $x = -1$, išskaidome kairiąją lygties pusę:

$$2x^3 - 3x^2 + 3x + 8 = (x+1)(2x^2 - 5x + 8).$$

Kadangi lygtis

$$2x^2 - 5x + 8 = 0$$

sprendinių neturi, tai nagrinėjamame intervale (1) lygtis turi tik vieną sprendinį $(x = -1)$.

2) Kai $x \in [0; 1]$, tai (1) lygtis yra ekvivalenti lygčiai $x^3 - (x-1)^3 = 9$, arba $3x^2 - 3x - 8 = 0$. Nors ši lygtis turi du sprendinius $\left(\frac{3 \pm \sqrt{105}}{6}\right)$, bet jie nepriklauso intervalui $[0; 1]$. Vadinasi, šiame intervale (1) lygtis sprendinių neturi.

3) Kai $x \in (1; +\infty)$, tai (1) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Vieną sprendinį atspėsime; tai $x = 2$. Tada dalydami kampu

(žr. 1 teoremą) daugianarį $2x^3-3x^2+3x-10$ iš dvinario $x-2$ gauname, kad

$$2x^3-3x^2+3x-10=(x-2)(2x^2+x+5).$$

Lygtis $2x^2+x+5=0$ sprendinių neturi. Taigi (1) lygtis intervale $(1;+\infty)$ turi vieną sprendinį ($x=2$).

Ats.: $\{-1;2\}$.

2. Išspręskime lygtį

$$x^3-(\sqrt{3}+1)x^2+3=0.$$

Sprendimas. Pertvarkome kairiąją lygties pusę sugrupuodami narius:

$$x^3-x^2\sqrt{3}-x^2+3=x^2(x-\sqrt{3})-(x^2-3)=$$
$$=x^2(x-\sqrt{3})-(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=(x-\sqrt{3})(x^2-x-\sqrt{3}).$$

Iš čia nustatome, kad lygtis turi tris sprendinius: $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$, $x_3=\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$.

Pastaba. Reiškinys $x^3-(a+1)x^2+a^2$ yra išskaidomas sandauga $(x-a)(x^2-x-a)$, kai a yra bet kuris realusis skaičius.

Ats.: $\left\{\sqrt{3};\dfrac{1-\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2};\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}\right\}$.

3. Išspręskime lygtį

$$(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5-x=0. \quad (2)$$

Sprendimas. Pažymėjus $f(x)=x^2+2x-5$, šią lygtį galima užrašyti taip: $f(f(x))=x$.

Jeigu x_0 yra lygties $f(x)=x$ sprendinys, tai $f(x_0)=x_0$ ir teisinga lygybė $f(f(x_0))=x_0$, kuri rodo, kad x_0 yra lygties $f(f(x))=0$ sprendinys.

Lygties $x^2+2x-5=x$ sprendiniai yra $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ ir

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$. Šiuos sprendinius turi ir (2) lygtis, kurią galima užrašyti taip:

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = 0.$$

Dalydami kampu iš $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + x - 5$ įsitikiname, kad kairioji lygties pusė išskaidoma sandauga

$$(x^2 + x - 5)(x^2 + 3x - 2).$$

Išsprendę lygtį $x^2 + 3x - 2 = 0$, gauname dar du (2) lygties sprendinius: $x_3 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$ ir $x_4 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Ats.: $\left\{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

4. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3. \qquad (3)$$

Sprendimas. Šią lygtį galima spręsti tradiciškai – du kartus pakeliant kvadratu. Mes ją išspręsime metodu, kurį galima taikyti ir kitokioms lygtims spręsti.

Kadangi

$$\left(\sqrt{3x^2 - 5x + 7}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 - 7x + 2}\right)^2 = 2x + 5,$$

tai (3) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = \frac{2x+5}{3}.$$

Sudėję šią lygtį su (3) lygtimi, gauname:

$$2\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{2x+14}{3} \Rightarrow 3\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = x + 7.$$

Pakėlę pastarąją lygtį kvadratu, gauname kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai yra $\dfrac{7}{26}$ ir 2.

Patikrinę įsitikiname, kad abu šie skaičiai yra (3) lygties sprendiniai.

Ats.: $\left\{\dfrac{7}{26}; 2\right\}$.

5. Išspręskime lygtį

$$\sqrt[4]{13-x}-\sqrt[4]{x+4}=1. \qquad (4)$$

Sprendimas. Pažymėję $u=\sqrt[4]{13-x}$, $v=\sqrt[4]{x+4}$, gauname sistemą

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^4+v^4=17. \end{cases}$$

Kadangi $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=((u-v)^2+2uv)^2-$ $-2u^2v^2=(1+2uv)^2-2(uv)^2$, tai pažymėjus $t=uv$, antrąją sistemos lygtį galima pakeisti lygtimi

$$(1+2t)^2-2t^2=17.$$

Šios lygties sprendiniai yra $t_1=-4$ ir $t_2=2$. Pirmasis netinka, nes turi būti $t\geq 0$ (todėl, kad $u\geq 0$ ir $v\geq 0$).

Toliau sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u\cdot v=2. \end{cases}$$

Gauname du sprendinius: $(2;1)$ ir $(-1;-2)$. Atmetę antrąjį (nes $u\geq 0$ ir $v\geq 0$), gauname vienintelį (4) lygties sprendinį: $x=-3$.

Ats.: –3.

6. Iš lygybės

$$a^b-2^b=\left(\sqrt{2a}\right)^b,\ a>0,\ b\neq 0, \qquad (5)$$

dydį a išreikškime dydžiu b.

Sprendimas. Dydžius a ir b siejančią (5) lygybę pertvarkykime taip:

$$a^b-2^b=\left(\sqrt{2a}\right)^b \Rightarrow a^b-2^b-2^{\frac{b}{2}}\cdot a^{\frac{b}{2}}=0 \Rightarrow \left(a^{\frac{b}{2}}\right)^2-2^{\frac{b}{2}}\cdot a^{\frac{b}{2}}-2^b=0.$$

Pažymėję $t=a^{\frac{b}{2}}$, gausime kvadratinę lygtį $t^2-2^{\frac{b}{2}}t-2^b=0$. Jos sprendiniai yra

$$t=\frac{2^{\frac{b}{2}}(1\pm\sqrt{5})}{2}.$$

Kadangi $t > 0$, tai tinka tik $t = \dfrac{2^{\frac{b}{2}}(1+\sqrt{5})}{2}$. Iš lygybės $a^{\frac{b}{2}} = \dfrac{2^{\frac{b}{2}}(1+\sqrt{5})}{2}$ gauname

$$a = 2 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{b}}.$$

7. Raskime bent vieną lygties $a^3 + b^4 = c^5$ sprendinį, jei nežinomieji a, b, c yra natūralieji skaičiai.

Sprendimas. Sprendinio paiešką natūralu pradėti nuo atvejo, kai $a = b = c = n$. Tada turėtume lygtį $n^3 + n^4 = n^5$ arba $n^3(1 + n - n^2) = 0$. Ši lygtis natūraliųjų sprendinių neturi.

Lengva nustatyti, kad visi trys skaičiai a, b ir c negali būti nelyginiai.

Nagrinėkime atvejį, kai visi trys nežinomieji yra lyginiai skaičiai, tarkime, dvejeto laipsniai. Tegu

$$a = 2^{4k}, \quad b = 2^{3l}, \quad c = 2^m.$$

Įrašę į lygtį, gausime:

$$2^{12k} + 2^{12l} = 2^{5m},$$

$$2^{12k-5m} + 2^{12l-5m} = 1.$$

Ši lygybė galima, kai $12k - 5m = -1$ ir $12l - 5m = -1$. Sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} 12k - 5m = -1, \\ 12l - 5m = -1. \end{cases}$$

Iš čia gauname $k = l = \dfrac{5m-1}{12}$. Pasirinkę $m = 5$, turėsime sprendinį $a = 2^8$, $b = 2^6$, $c = 2^5$. Jis nėra vienintelis – dar tinka, pavyzdžiui, trejetai $(2^{28}, 2^{21}, 2^{17})$, $(2^{48}, 2^{36}, 2^{29})$ ir kt.

Ats.: $(2^8, 2^6, 2^5)$, $(2^{28}, 2^{21}, 2^{17})$, $(2^{48}, 2^{36}, 2^{29})$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Brolio ir sesers metų suma lygi 26. Be to, sesers metų skaičius yra tris kartus mažesnis už būsimą brolio metų skaičių, kai jiems abiems kartu bus penkis kartus daugiau metų negu broliui dabar yra. Kiek metų broliui ir seseriai yra dabar?

2. Raskite lygties $a^3 + b^5 = c^2$ vieną sprendinį, jei a, b ir c – natūralieji skaičiai.

3. Išspręskite nelygybę $\sqrt{x+2-x^2} < \sqrt{x^2-3x+2} + x$.

4. Skaičiai a ir b ($a > 0$, $a \neq 2$) susieti lygybe $a^{2b} - 4^b = (2a)^b$. Išreikškite b skaičiumi a.

5. Įrodykite, kad dviejų iš skaičių a, b ir c suma yra lygi nuliui, jei šie skaičiai tenkina lygybę

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Išspręskite šias lygtis:

6. $|x|^3 - |x-2|^3 = 8;$

7. $x^3 + (2\sqrt{3} - 1)x^2 + 12 = 0;$

8. $2(2x^2 + 5x - 4)^2 + 5(2x^2 + 5x - 4) - x - 4 = 0;$

9. $\sqrt{3x^2 + x + 5} - \sqrt{3x^2 - x - 2} = 3;$

10. $\sqrt[4]{10 + x + x^2} + \sqrt[4]{7 - x - x^2} = 3.$



III. TRIGONOMETRINIŲ KEITINIŲ TAIKYMAS SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS

Vidmantas Pekarskas
(Kauno technologijos universitetas)

Sprendžiant algebros uždavinius kartais kintamieji (vienas arba keli) pakeičiami trigonometrinėmis funkcijomis. Jeigu iš sąlygos aišku, kad $|x| \leq 1$, tai galima naudoti keitinį $x = \sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ arba keitinį $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, nes kai α kinta šiuose intervaluose, funkcijos $\sin\alpha$ ir $\cos\alpha$ įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$. Kai kintamasis x gali įgyti bet kokias reikšmes, naudojami keitiniai $x = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ arba $x = \operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$.

Sprendžiant šios užduoties uždavinius, teks panaudoti įvairias trigonometrijos formules. Jei jų dar nesimokėte, turėsite su jomis susipažinti savarankiškai.

Pažintį su trigonometriniais keitiniais pradėsime nuo pavyzdžio.

1 pavyzdys. Raskime didžiausią reiškinio

$xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ reikšmę.

Sprendimas. Kadangi reiškinys turi prasmę, kai $1 - x^2 \geq 0$ ir $1 - y^2 \geq 0$, tai turi būti $x^2 \leq 1$ ir $y^2 \leq 1$. Iš čia $|x| \leq 1$ ir $|y| \leq 1$. Vadinasi, galime pažymėti

$$x = \sin\alpha,\ \ y = \sin\beta;\ \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ \ \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Tada $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha} = |\cos\alpha|$ ir $\sqrt{1-y^2} = |\cos\beta|$.

Kai $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ir $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tai $\cos\alpha \geq 0$ ir $\cos\beta \geq 0$; todėl $|\cos\alpha| = \cos\alpha$, $|\cos\beta| = \cos\beta$, o nagrinėjamasis reiškinys tampa toks:

$$\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\cos\beta =$$

$$= \sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)}{2} =$$

$$= 2\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{4}\right).$$

Šio reiškinio didžiausia reikšmė lygi $\sqrt{2}$, nes didžiausia $\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{4}\right)$ reikšmė lygi 1.

Ats.: $\sqrt{2}$.

Uždavinį pavyko išspręsti tinkamai parinkus trigonometrinį keitinį. Naudojantis trigonometriniais keitiniais, kintamieji laikomi tam tikromis trigonometrinėmis funkcijomis. Keitinius reikia pasirinkti taip, kad duotasis reiškinys kiek galima labiau supaprastėtų.

Jau įsitikinome, kad keitinys $x = \sin\alpha$ arba $x = \cos\alpha$ tinka, kai reiškinyje yra šaknis $\sqrt{1-x^2}$.

Bendruoju atveju, kai reiškinyje yra šaknis $\sqrt{a^2-x^2}$, naudojamas keitinys $x = a\sin\alpha$; kai yra šaknis $\sqrt{x^2-a^2}$, tai naudojamas keitinys $x = \frac{a}{\sin\alpha}$; o kai yra šaknis $\sqrt{a^2+x^2}$, tai naudojamas keitinys $x = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $1+x^3 = (x^2+3x-1)\sqrt{1-x^2}$.

Sprendimas. Jeigu spręstume lygtį tiesiogiai, keldami abi jos puses kvadratu, gautume lygtį $x^5+3x^4+3x^3-5x^2-3x+3=0$, kurią išspręsti ne taip jau lengva. Panaudokime keitinį $x = \sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Gauname lygtį

$$1+\sin^3\alpha = (\sin^2\alpha + 3\sin\alpha - 1)\cos\alpha.$$

Ją pertvarkome:

$$1+\sin^3\alpha=\left(3\sin\alpha-\cos^2\alpha\right)\cdot\cos\alpha,$$

$$1+\sin^3\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha-\cos^3\alpha,$$

$$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha-1,$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)=3\sin\alpha\cos\alpha-1,$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)=3\sin\alpha\cos\alpha-1. \qquad (1)$$

Pažymėję $\sin\alpha+\cos\alpha=z$ (čia $|z|\le\sqrt{2}$, nes $\sin\alpha+\cos\alpha=$ $=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$), turime

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=z^2;$$

iš čia $1+2\sin\alpha\cos\alpha=z^2$ ir $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{z^2-1}{2}$. Tuomet (1) lygtis užrašoma taip:

$$z\left(1-\frac{z^2-1}{2}\right)=3\cdot\frac{z^2-1}{2}-1,$$

$$z\left(3-z^2\right)=3\left(z^2-1\right)-2,$$

$$z^3+3z^2-3z-5=0.$$

Spręsdami šią lygtį, jos narius sugrupuojame:

$$z^3+z^2+2z^2+2z-5z-5=0,$$

$$z^2(z+1)+2z(z+1)-5(z+1)=0,$$

$$(z+1)\left(z^2+2z-5\right)=0.$$

Iš čia $z=-1$ arba $z=-1\pm\sqrt{6}$. Kadangi turi būti $|z|\le\sqrt{2}$, tai tinka tik sprendinys $z=-1$. Gauname lygtį $\sin\alpha+\cos\alpha=-1$, kuri pertvarkoma į lygtį $x+\sqrt{1-x^2}=-1$. Išsprendę šią iracionaliąją lygtį, gauname sprendinį $x=-1$.

Ats.: -1.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

Sprendimas. Kadangi lygtis turi prasmę, kai $x>1$, tai pažymėkime $x=\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tada lygtis tampa tokia:

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{35}{12},$$

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{35}{12}.$$

Spręsdami šią lygtį, pažymėkime: $\sin\alpha+\cos\alpha=u\quad(u>0)$.

Tada $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=u^2$ ir todėl $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{u^2-1}{2}$. Vadinasi, $\dfrac{2u}{u^2-1}=\dfrac{35}{12}$. Gauname kvadratinę lygtį $35u^2-24u-35=0$, turinčią du sprendinius: $-\dfrac{5}{7}$ ir $\dfrac{7}{5}$. Bet tinka tik $u=\dfrac{7}{5}$, nes $u>0$.

Toliau sprendžiame lygtį $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$:

$$\sin\alpha+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=1{,}4,$$

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=1{,}4-\sin\alpha,$$

$$1-\sin^2\alpha=(1{,}4-\sin\alpha)^2,$$

$$2\sin^2\alpha-2{,}8\sin\alpha+0{,}96=0.$$

Ši kvadratinė lygtis turi du sprendinius: 0,6 ir 0,8. Vadinasi, $x=\dfrac{1}{0{,}6}=\dfrac{5}{3}$ arba $x=\dfrac{1}{0{,}8}=\dfrac{5}{4}$.

Ats.: $\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{4}$.

Trigonometriniai keitiniai naudojami, kai kintamieji tarpusavyje susiję tam tikrais ryšiais.

1. Kai $x^2+y^2=1$, tai verta taikyti keitinį $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$ $(\alpha\in[0;\,2\pi])$.

4 pavyzdys. Nustatykime, kam lygus reiškinys $ab+cd$, jeigu $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$.

Sprendimas. Pažymėkime $a=\sin\alpha$, $b=\cos\alpha$, $c=\sin\beta$, $d=\cos\beta$ $(\alpha\in[0;\,2\pi],\beta\in[0;2\pi])$. Tuomet iš sąlygos $ac+bd=0$ turime $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=0$, o iš čia $\cos(\alpha-\beta)=0$. Įrašę keitinius į reiškinį $ab+cd$ gauname:

$$ab+cd=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0.$$

Ats.: 0.

2. Kai $x^2+y^2=a^2$, tai gali tikti keitinys $x=a\cos\alpha$, $y=a\sin\alpha$ $(\alpha\in[0;\,2\pi])$.

5 pavyzdys. Raskime tuos lygčių sistemos

$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z^2+t^2=9,\\ xt+yz=6\end{cases}$$

sprendinius $(x;\,y;\,z;\,t)$, su kuriais reiškinys $x+z$ įgyja didžiausią reikšmę.

Sprendimas. Pažymėkime $x=2\cos\alpha$, $y=2\sin\alpha$, $z=3\cos\beta$, $t=3\sin\beta$ $(\alpha\in[0;\,2\pi],\beta\in[0;\,2\pi])$. Tada iš sąlygos $xt+yz=6$, gauname:

$$2\cos\alpha\cdot 3\sin\beta+2\sin\alpha\cdot 3\cos\beta=6,$$

$$\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=1,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=1.$$

Iš čia $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ arba $\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{2}$.

Įrašę keitinius į reiškinį $x+z$, turime

$$x+z=2\cos\alpha+3\cos\beta.$$

Kadangi $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ arba $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{2}$, tai

$$x+z=2\cos\alpha+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos\alpha+3\sin\alpha$$

arba

$$x+z=2\cos\alpha+3\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos\alpha+3\sin\alpha.$$

Vadinasi, turime rasti α reikšmę, su kuria reiškinys $2\cos\alpha+3\sin\alpha$ įgyja didžiausią reikšmę. Iš pradžių pertvarkykime reiškinį $2\cos\alpha+3\sin\alpha$:

$$2\cos\alpha+3\sin\alpha=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos\alpha+\frac{3}{\sqrt{13}}\sin\alpha\right).$$

Pažymėję $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$, turėsime, jog $\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}}$. Tada

$$2\cos\alpha+3\sin\alpha=\sqrt{13}(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha)=\sqrt{13}\cos(\varphi-\alpha).$$

Šis reiškinys įgyja didžiausią reikšmę, kai $\cos(\varphi-\alpha)=1$; taigi, kai $\varphi-\alpha=2\pi k,\ k\in Z$. Iš čia $\alpha=\varphi-2\pi k,\ k\in Z$, ir

$$\cos\alpha=\cos(\varphi-2\pi k)=\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\sin\alpha=\sin(\varphi-2\pi k)=\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Toliau: $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}$. Vadinasi, $x=\frac{4}{\sqrt{13}}$, $y=\frac{6}{\sqrt{13}}$, $z=\frac{9}{\sqrt{13}}$, $t=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

Ats.: $\left(\frac{4\sqrt{13}}{13};\frac{6\sqrt{13}}{13};\frac{9\sqrt{13}}{13};\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$.

3. Kai $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, tai verta taikyti keitinį $x = \cos^3\alpha$, $y = \sin^3\alpha$ $(\alpha \in [0; 2\pi])$.

6 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = 1,$$

kai $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Sprendimas. Taikykime keitinį $x = \cos^3\alpha$, $y = \sin^3\alpha$. Tuomet

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} =$$

$$= \sqrt{\cos^6\alpha + \sqrt[3]{\cos^{12}\alpha \sin^6\alpha}} + \sqrt{\sin^6\alpha + \sqrt[3]{\cos^6\alpha \sin^{12}\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\cos^6\alpha + \cos^4\alpha \sin^2\alpha} + \sqrt{\sin^6\alpha + \cos^2\alpha \sin^4\alpha} =$$

$$= \sqrt{\cos^4\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} + \sqrt{\sin^4\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} =$$

$$= \sqrt{\cos^4\alpha} + \sqrt{\sin^4\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

4. Kai $xy + yz + zx = 1$, tinka keitiniai $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$; čia $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Įrodysime tai.

Iš sąlygos $xy + yz + zx = 1$ turime $z = \dfrac{1 - xy}{x + y}$.

Jeigu $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ $(\alpha, \beta \in (-\pi; \pi))$, tai

$$z = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{(\alpha + \beta)}{2}.$$

Bet $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, todėl

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\pi-\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Taigi $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$, kai $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

7 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} xy+yz+zx=1, \\ 12x(1+y^2)=5y(1+x^2), \\ 13y(1+z^2)=12z(1+y^2). \end{cases}$$

Sprendimas. Antrąją ir trečiąją lygtis užrašykime taip:

$$\frac{x}{5(1+x^2)}=\frac{y}{12(1+y^2)} \text{ ir } \frac{y}{12(1+y^2)}=\frac{z}{13(1+z^2)}.$$

Iš čia $\frac{x}{5(1+x^2)}=\frac{y}{12(1+y^2)}=\frac{z}{13(1+z^2)}$.

Taikykime keitinius $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ ir $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Tuomet

$$\frac{x}{1+x^2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\alpha}{2},$$

$$\frac{y}{1+y^2}=\frac{\sin\beta}{2},$$

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{\sin\gamma}{2}.$$

Vadinasi, turime lygčių sistemą

$$\frac{\sin\alpha}{5}=\frac{\sin\beta}{12}=\frac{\sin\gamma}{13}.$$

Iš sinusų teoremos išplaukia, kad α, β, γ – trikampio, kurio kraštinės proporcingos skaičiams 5, 12, 13, kampai. Toks trikampis yra statusis $\left(\gamma=\frac{\pi}{2}\right)$. Tada $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\frac{12}{13}$. Iš čia $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$.

Pritaikę formulę

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

gauname

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{2}{3}.$$

Taigi radome sistemos sprendinį $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{3};1\right)$. Aišku, kad $\left(-\frac{1}{5};-\frac{2}{3};-1\right)$ taip pat yra sprendinys.

Ats.: $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{3};1\right)$, $\left(-\frac{1}{5};-\frac{2}{3};-1\right)$.

Trigonometrinius keitinius taip pat galima panaudoti ir įrodant kai kurias nelygybes.

8 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+d)(b+c)},$$

kai a, b, c, d – teigiamieji skaičiai.

Sprendimas. Padaliję abi puses iš $\sqrt{(a+d)(b+c)}$, gauname nelygybę

$$\sqrt{\frac{a}{a+d}\cdot\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}\cdot\frac{d}{a+d}}\le 1.$$

Kadangi $0<\frac{a}{a+d}<1$, $0<\frac{b}{b+c}<1$, $0<\frac{c}{b+c}<1$, $0<\frac{d}{a+d}<1$, tai galime pažymėti $\frac{a}{a+d}=\sin^2\alpha$, $\frac{c}{b+c}=\sin^2\beta$. Tada $\frac{d}{a+d}=\cos^2\alpha$ ir $\frac{b}{b+c}=\cos^2\beta$. Įrašę šiuos keitinius, turėsime ekvivalenčią nelygybę

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\le 1,$$

$$\sin(\alpha+\beta)\le 1,$$

kuri teisinga su visais realiaisiais skaičiais α ir β.

TREČIOJI UŽDUOTIS

Išspręskite lygtis

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$

Nurodymas: taikykite keitinį $x=\sin\alpha;\quad \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$

2. $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$

Nurodymas: taikykite keitinį $x=\sin\alpha;\quad \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$

3. $x^2\sqrt{1-x^2}=|x|^3-|x|+\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Nurodymas: taikykite keitinį $x=\sin\alpha;\quad \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$

4. $\sqrt{1-2x}\cdot\left(1-4x\sqrt{1+2x}\right)=8x^2-1.$

Nurodymas: taikykite keitinį $2x=\cos 2\alpha;\quad \alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

5. Raskite didžiausią reiškinio $\frac{3y^2-4xy}{x^2+y^2}$ reikšmę.

Išspręskite lygčių sistemas

6. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 4xy\left(2y^2-1\right)=1. \end{cases}$

Nurodymas: taikykite keitinius $x=\sin\alpha;\quad y=\cos\alpha;\quad \alpha\in[0;2\pi].$

7. $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+3y=4y^3, \\ y+3z=4z^3, \\ z+3x=4x^3. \end{cases}$

Nurodymas: įrodykite, kad $x, y, z \in [-1;1]$ ir taikykite keitinį $x=\cos\alpha, \quad \alpha \in [0;\pi]$.

9. Įrodykite, kad

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)\sqrt{ab} \le \sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)} \le 2\sqrt{ab},$$

kai *a*, *b*, *c* – teigiamieji skaičiai, *c* – mažiausias iš jų visų.

Nurodymas: taikykite keitinius $\dfrac{c}{a}=\sin 2\alpha, \quad \dfrac{c}{b}=\sin 2\beta$, $\alpha, \beta \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

10. Įrodykite, kad

$$\left|\frac{c}{b}-\frac{c}{a}\right|\sqrt{ab} \le \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab},$$

kai *a*, *b*, *c* – teigiamieji skaičiai, o *c* – mažiausias iš jų.

Nurodymas: taikykite keitinius $\dfrac{c}{a}=\cos^2\alpha, \quad \dfrac{c}{b}=\cos^2\beta$, $\alpha, \beta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.



IV. NELYGYBĖS TEKSTINIUOSE UŽDAVINIUOSE

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Tekstiniais uždaviniais paprastai yra vadinami tokie uždaviniai, kuriuose matematinė problema formuluojama žodžiais aprašant situaciją bei sąsajas tarp žinomų ir norimų žinoti dydžių. Sprendžiant juos nepakanka mokėti spręsti lygtis, nelygybes ir jų sistemas. Kartais labai reikia gebėjimo įsigilinti į uždavinio sąlygą, kad galėtum išsiaiškinti, ką reikia rasti, taip pat tam tikro sumanumo sudarant matematinį modelį, kad gautąjį uždavinį mokėtum išspręsti.

Mokyklinės matematikos vadovėliuose bei uždavinynuose yra daug įvairių tekstinių uždavinių, kuriuose sąsajas tarp žinomų ir ieškomų dydžių galima išreikšti lygtimis bei lygčių sistemomis. Rečiau pasitaiko uždavinių, kurių sąlygose slypi tiesinės, kvadratinės bei kitokios nelygybės. Tokie uždaviniai nėra nei sunkesni, nei lengvesni – jie yra tiesiog ne tokie „kasdieniški“ kaip „tradiciniai“ tekstiniai uždaviniai. Tai aiškiai matyti ir iš čia aprašomų pavyzdžių. Nagrinėdami juos (taip pat ir spręsdami uždavinius) atkreipkime dėmesį į tai, kad nežinomų dydžių reikšmėms rasti reikia remtis ne tik tiesiogiai suformuluotomis sąsajomis tarp dydžių, bet ir visomis kitomis uždavinyje slypinčiomis netiesioginėmis sąlygomis. Pavyzdžiui, paprastai nerašoma, kad ieškomų dydžių reikšmės gali būti tik teigiami ar sveikieji skaičiai, jeigu tai savaime suprantama iš pačios uždavinio sąlygos.

Pateikdami tekstinius uždavinius, kurių matematiniuose modeliuose yra nelygybių, šį kartą nesileisime į teorinę jų analizę; taip pat neklasifikuosime uždavinių pagal kokius nors požymius. Apsiribosime keliais uždavinių pavyzdžiais ir jų sprendimo aiškinimu.

1 pavyzdys. Vienoje sodyboje buvo pasodinta daugiau kaip 14 medžių – beržų ir liepų. Beržų pasodinta mažiau negu liepų – net dvigubas beržų skaičius mažesnis už liepų skaičių. Tačiau pridėję prie beržų skaičiaus 18, gautume daugiau negu padvigubinę liepų skaičių. Kiek beržų ir kiek liepų buvo pasodinta?

Sprendimas. Tegu x yra pasodintų beržų skaičius, o y – liepų skaičius. Pagal sąlygą galioja tokie sąryšiai:

$$x+y>14,\ \ 2x<y \text{ ir } x+18>2y.$$

Iš jų gauname:

1) $\begin{cases} 2x < y, \\ x+18 > 2y \end{cases} \Rightarrow x+18 > 2y > 4x \Rightarrow x+18 > 4x \Rightarrow x < 6;$

2) $\begin{cases} x+y > 14, \\ x < 6 \end{cases} \Rightarrow 14 < x+y < y+6 \Rightarrow y+6 > 14 \Rightarrow y > 8;$

3) $\begin{cases} x+18 > 2y, \\ x < 6 \end{cases} \Rightarrow 2y < x+18 < 6+18 = 24 \Rightarrow 2y < 24 \Rightarrow y < 12;$

Taigi $x < 6,\ 8 < y < 12.$

Toliau tikriname, ar skaičių $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ir $y \in \{9; 10; 11\}$ **poros** $(x; y)$ tenkina sąlygas $x+y > 14,$ $2x < y$ ir $x+18 > 2y$. Gauname vienintelę porą $(5; 11)$.

Ats.: 5 beržai ir 11 liepų.

2 pavyzdys. Trupmenos $\frac{m}{n}$ vardiklis yra vienetu mažesnis už jos skaitiklio kvadratą. Pridėjus po 2 ir prie skaitiklio, ir prie vardiklio, gaunama trupmena didesnė už $\frac{1}{4}$; o atėmus po 3 (ir iš skaitiklio, ir iš vardiklio) – mažesnė už $\frac{1}{10}$. Raskime trupmeną $\frac{m}{n}$.

Sprendimas. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti šie sąryšiai:

1) $n = m^2 - 1;$ 2) $\frac{m+2}{n+2} > \frac{1}{4};$ 3) $\frac{m-3}{n-3} < \frac{1}{10}.$

Į abi nelygybes įrašykime $n = m^2 - 1$ ir išspręskime sistemą

$$\begin{cases} n = m^2 - 1, \\ \dfrac{m+2}{m^2+1} > \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{m-3}{m^2-4} < \dfrac{1}{10}. \end{cases} \qquad (1)$$

Gausime:

1) $\frac{m+2}{m^2+1} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m+2}{m^2+1} - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{m^2-4m-7}{m^2+1} < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m^2-4m-7<0 \Rightarrow (m-2)^2-11<0 \Rightarrow (m-2)^2<11 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\sqrt{11}<m-2<\sqrt{11} \Rightarrow 2-\sqrt{11}<m<2+\sqrt{11};$$

2) $$\frac{m-3}{m^2-4}<\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{m-3}{m^2-4}-\frac{1}{10}<0 \Rightarrow \frac{m^2-10m+26}{m^2-4}>0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(m-5)^2+1}{m^2-4}>0 \Rightarrow m^2-4>0 \Rightarrow (m-2)(m+2)>0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m<-2 \text{ arba } m>2.$$

Toliau nagrinėjame sistemą

$$\begin{cases} n=m^2-1, \\ 2-\sqrt{11}<m<2+\sqrt{11}, \\ m<-2 \text{ arba } m>2 \end{cases} \qquad (2)$$

ir gauname, kad ji ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} n=m^2-1, \\ 2<m<2+\sqrt{11}. \end{cases} \qquad (3)$$

Intervale $(2;2+\sqrt{11})$ yra trys sveikieji skaičiai: 3, 4 ir 5; todėl gauname tris skaičių m ir n poras $(m;n)$, kurios tenkina (3) sistemą: $(3;8)$, $(4;15)$ ir $(5;24)$. Šios skaičių poros kartu yra (2) bei (1) sistemų sprendiniai.

Ats.: $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{5}{24}$.

3 pavyzdys. Iš vietovės A į vietovę B vienu metu išvažiavo du automobiliai. Pirmasis automobilis pusę kelionės laiko važiavo greičiu a (km/h), o antrą pusę laiko – greičiu b (km/h). Antrasis automobilis pirmą kelio pusę važiavo greičiu b, o antrą kelio pusę – greičiu a. Nustatykime, kuris automobilis greičiau pasiekė vietovę B, kai $a \neq b$.

Sprendimas. Tegu S yra atstumas (kilometrais) tarp vietovių A ir B, t_1 – pirmojo automobilio kelionės laikas (valandomis), o t_2 – antrojo automobilio kelionės laikas (valandomis).

Pagal informaciją apie pirmojo automobilio kelionę galima užrašyti

lygybę $S = a \cdot \frac{t_1}{2} + b \cdot \frac{t_1}{2} = \frac{(a+b)t_1}{2}$, o iš antrojo automobilio kelionės aprašymo gauname lygybę

$$t_2 = \frac{S}{2b} + \frac{S}{2a} = \frac{(a+b)S}{2ab}.$$

Spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} S = \frac{(a+b)t_1}{2}, \\ t_2 = \frac{(a+b)S}{2ab}, \end{cases}$$

gauname $t_1 = \frac{2S}{a+b}$. Tada

$$t_1 - t_2 = \frac{2S}{a+b} - \frac{(a+b)S}{2ab} = \frac{4abS - (a+b)^2 S}{2ab(a+b)} =$$

$$= \frac{(4ab - a^2 - 2ab - b^2)S}{2ab(a+b)} = -\frac{(a-b)^2 S}{2ab(a+b)} < 0$$

(nes $a \neq b, a > 0, b > 0$).

Taigi $t_1 - t_2 < 0 \Rightarrow t_1 < t_2$.

Ats.: pirmasis automobilis atvyko anksčiau už antrąjį.

4 pavyzdys. Rengiant dviejų komandų A ir B šaškių varžybas buvo numatyta, kad kiekvienas vienos komandos narys sužais po vieną partiją su kiekvienu kitos komandos nariu. Žinoma, kad komandos A narių skaičius mažesnis už komandos B narių skaičių, o planuotų partijų skaičius 4 kartus didesnis už bendrą abiejų komandų narių skaičių. Tačiau du šaškininkai susirgo ir neatvyko į varžybas; todėl bendras sužaistų partijų skaičius buvo 17 mažesnis už planuotą jų skaičių. Raskite varžybose dalyvavusių komandos A narių skaičių.

Sprendimas. Komandos A narių skaičių pažymėkime m, o komandos B narių skaičių – n. Pagal uždavinio sąlygą šiuos skaičius sieja nelygybė $m < n$ ir lygybė $m \cdot n = 4(m+n)$.

Tegu x yra atvykusių į varžybas komandos A narių skaičius, o y – atvykusių į varžybas komandos B narių skaičius. Pagal uždavinio sąlygą $x + y = m + n - 2$ ir $xy = mn - 17$.

Taigi turime tokią sąlygų sistemą:

$$\begin{cases} mn = 4(m+n), & (1) \\ x + y = m + n - 2, & (2) \\ xy = mn - 17, & (3) \\ m < n. & (4) \end{cases}$$

Sprendžiant šią sistemą nesunku įsivelti į painius ir klampius skaičiavimus. Todėl neskubėkime ieškoti formulės dydžio x reikšmėms skaičiuoti, o sukoncentruokime dėmesį į faktą, kad neatvyko du žaidėjai. Yra tik trys galimybės: 1) $x = m,\quad y = n - 2$; 2) $x = m - 2,\quad y = n$; 3) $x = m - 1,\quad y = n - 1$.

Pirmuoju atveju iš (3) lygties gauname:

$$m(n-2) = mn - 17 \Rightarrow 2m = 17 \Rightarrow m \notin \mathrm{N};$$

taigi atvejis neįmanomas.

Antruoju atveju analogiškai gauname, jog turėtų galioti lygybė $2n = 17$. Ir šis atvejis yra neįmanomas.

Kai $x = m - 1,\quad y = n - 1$, iš (3) lygties gauname lygybę $m + n = 18$.

Kartu su ja turi galioti ir (1) lygybė; todėl sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} m + n = 18, \\ mn = 4(m+n) \end{cases}$$

ir gauname:

$$\begin{cases} m = 18 - n, \\ (18-n)n = 4\cdot 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 18 - n, \\ n^2 - 18n + 72 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 18 - n, \\ (m-9)^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 18 - n, \\ m = 9 \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 18 - n, \\ m \in \{6; 12\}. \end{cases}$$

Atsižvelgę į (4) nelygybę, turėsime vienintelį (1)–(4) sistemos sprendinį: $m = 6,\quad n = 12,\quad x = 5,\quad y = 11$.

Ats.: 5.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Jeigu keliautojas per dieną nuvažiuotų 20 km daugiau, negu jis iš tikrųjų nuvažiuoja, tai per 8 dienas nuvažiuotų mažiau negu 1000 km. O jeigu sulėtintų kelionės tempą $15\frac{2}{3}$ km per dieną, tai per 12 dienų jis įveiktų daugiau kaip 1000 km. Įvertinkite keliautojo vidutinį greitį (km per dieną), t. y. raskite jo kitimo ribas.

2. Iš pradžių motorinė valtis plaukia 10 kilometrų pasroviui, o paskui 6 kilometrus plaukia atgal (prieš srovę). Upės tėkmės greitis lygus 1 km/h. Raskite pačios valties vidutinio greičio ribas (km/h), kad visa kelionė užtruktų tarp 3 ir 4 valandų.

3. Plaustas, nešamas upės srovės, iš punkto A į punktą B nuplaukia per 24 valandas, o kateris, nekeisdamas savo greičio, visą kelią nuo A iki B ir atgal įveikia per 10 valandų. Jei katerio greitis būtų 40 % didesnis, tai tam pačiam keliui įveikti jis sugaištų ne daugiau kaip 7 valandas. Raskite laiką, per kurį kateris nuplaukia iš punkto B į punktą A (plaukdamas prieš srovę).

4. Deimanto kaina yra proporcinga jo svorio kvadratui. Nustatykite, kuriuo atveju tektų išleisti daugiau pinigų – perkant visą deimanto gabalą ar padalijus jį į tris mažesnius gabalus ir mokant už kiekvieną atskirai.

5. Dviejų natūraliųjų skaičių suma lygi 119, o jų bendrasis didžiausias daliklis yra 7. Raskite tuos du natūraliuosius skaičius, tenkinančius šias sąlygas, kurių sandauga yra pati didžiausia.

6. Statant kėdes į 13 vienodo ilgio eilių, paskutinei eilei pritrūko kelių kėdžių. Perstumdant kėdes į 27 vienodo ilgio eiles, jos sutrumpėjo 7 kėdėmis; tačiau paskutinei eilei pritrūko 3 kėdžių. Raskite kėdžių skaičių.

7. Dviejuose krepšiuose yra daugiau kaip 27 grybai. Jei pirmame krepšyje būtų 24 grybais daugiau, tai grybų skaičius jame būtų dvigubai didesnis negu antrame. O jeigu pirmame krepšyje būtų 10

grybų mažiau, tai grybų skaičius antrame krepšyje būtų daugiau kaip 9 kartus didesnis negu pirmame. Kiek grybų yra pirmame krepšyje ir kiek – antrame?

8. Mama nupirko vaikams raudonų ir mėlynų pieštukų, sudėtų į dėžutes (kiekvienoje dėžutėje – po vienodai tos pačios spalvos pieštukų). Kiekvienoje dėžutėje raudonų pieštukų yra daugiau kaip trimis mažiau negu mėlynų pieštukų. Jeigu kiekvienoje dėžutėje mėlynų pieštukų būtų trigubai daugiau, o raudonų pieštukų – dvigubai daugiau negu yra, tai skirtumas tarp mėlynų ir raudonų pieštukų skaičiaus dėžutėje būtų ne didesnis kaip 16; tada bendras nupirktų pieštukų skaičius būtų lygus 81. Raskite mėlynų ir raudonų pieštukų skaičių dėžutėje; taip pat nustatykite, kelias pieštukų dėžutes mama nupirko.

9. Egzaminą laikė 30 studentų grupė ir gavo tokius įvertinimus: 4, 6, 8 ir 10. Šešetus gavusių studentų skaičius didesnis už dešimtukus gavusių, bet mažesnis už aštuonetus gavusių studentų skaičių. Dešimtukų skaičius yra lyginis, o aštuntukų – dalijasi iš 10. Bendra visų studentų įvertinimų suma yra lygi 186. Nustatykite, keli studentai gavo 10 balų, keli 8, 6 bei 4 balus.

10. Šachmatininkų atrankos turnyre dalyvavo 24 mokiniai – kiekvienas mokinys turėjo sužaisti po vieną partiją su kiekvienu varžovu. Skaičiuojant rezultatus, už pergalę skiriamas vienas taškas, už lygiąsias – 0,5 taško, o pralaimėjus partiją taškai neskiriami. Pagal nuostatus į mokyklos komandą kviečiami tik ne mažiau kaip 14,5 taškų surinkę mokiniai. Nustatykite, kiek daugiausiai mokinių galėjo būti pakviesta į komandą.



V. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI IR JŲ TAIKYMAS

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI IR VEIKSMAI SU JAIS

Visiems gerai žinoma natūraliųjų skaičių aibė *N*. Šioje aibėje galima atlikti du veiksmus – sudėtį ir daugybą. Tačiau atvirkštiniai veiksmai – atimtis ir dalyba – ne visada galimi. Jeigu prie natūraliųjų skaičių prijungsime nulį ir sveikuosius neigiamus skaičius, tai gausime sveikųjų skaičių aibę *Z*, kurioje jau galima atlikti atimties veiksmą. Tačiau aibėje *Z* dalyba ne visada galima. Sveikųjų skaičių aibę papildę trupmeniniais skaičiais, gauname racionaliųjų skaičių aibę *Q*, kurioje galimi keturi veiksmai: sudėtis, atimtis, daugyba ir dalyba iš nelygaus nuliui skaičiaus. Racionaliųjų skaičių aibėje yra išsprendžiamos pirmojo laipsnio algebrinės lygtys $ax+b=0$, $a, b \in Q$. Bet jau paprasčiausia kvadratinė lygtis $x^2-2=0$ racionaliųjų skaičių aibėje neturi sprenkdinių, t. y. nėra tokio racionaliojo skaičiaus, kurio kvadratas būtų lygus 2. Yra žinoma, kad $\sqrt{2}$ yra iracionalusis skaičius. Prie racionaliųjų skaičių aibės prijungę iracionaliuosius skaičius, gauname realiųjų skaičių aibę *R*. Vis dėlto ir realiųjų skaičių aibėje ne visos algebrinės lygtys yra išsprendžiamos. Pavyzdžiui, kvadratinės lygtys, kurių diskriminantai yra neigiami, neturi realiųjų sprendinių. Taigi reikia praplėsti ir realiųjų skaičių aibes. Realiųjų skaičių aibę praplėsime iki kompleksinių skaičių aibės.

Kompleksiniai skaičiai (menamieji dydžiai) buvo įvesti formaliai – sprendžiant kubines ir kvadratines lygtis. Pavyzdžiui, kvadratinės lygties $x^2-4x+20=0$ sprendiniai buvo užrašomi taip:

$$x_1 = 2+\sqrt{-16} = 2+4\cdot\sqrt{-1}\,,\ x_2 = 2-4\cdot\sqrt{-1}\,;$$

ką reiškia simboliai $\sqrt{-1}$, $4\cdot\sqrt{-1}$ – neaiškinama.

Prancūzų matematikas R. Dekartas (René Descartes, 1596–1650, prancūzų filosofas, matematikas ir fizikas) simbolį $\sqrt{-1}$ pasiūlė vadinti *menamuoju vienetu*, o L. Oileris (Leonhard Euler, 1703–1783, šveicarų matematikas) šį simbolį pasiūlė žymėti prancūziško žodžio *imaginaire* (menamas, įsivaizduojamas) pirmąja raide. F. Gausas (Carl Friedrich

Gauss, 1777–1855, vokiečių matematikas) reiškinį $x+iy$, $x, y \in R$, pavadino *kompleksiniu skaičiumi.* Mes kompleksinius skaičius apibrė–šime kitaip.

Kompleksiniu skaičiumi z vadinama realiųjų skaičių x ir y sutvarkyta pora $(x; y)$. Šios poros pirmasis skaičius x vadinamas kompleksinio skaičiaus z *realiąja dalimi*, o antrasis skaičius y – *menamąja dalimi* arba *menamosios dalies koeficientu*. Žymima: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Kai $y = 0$, kompleksinis skaičius $z = (x; 0)$ sutapatinamas su realiuoju skaičiumi x. Kai $x = 0$, kompleksinis skaičius $z = (0; y)$ vadinamas *menamuoju* skaičiumi. Skaičiai $(0; 0) = 0$, $(1; 0) = 1$ ir $(0; 1) = i$ vadinami *nuliu*, *vienetu* ir *menamuoju vienetu*.

Du kompleksiniai skaičiai $z_1 = (x_1, y_1)$ ir $z_2 = (x_2, y_2)$ vadinami *lygiais*, jeigu

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2. \tag{1}$$

Dviejų kompleksinių skaičių $z_1 = (x_1, y_1)$ ir $z_2 = (x_2, y_2)$ *suma* vadinamas kompleksinis skaičius

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2), \tag{2}$$

o šių skaičių *sandauga* – kompleksinis skaičius

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1). \tag{3}$$

Akivaizdu, kad $z + 0 = z$, $z \cdot 0 = 0$, $z \cdot 1 = z$, $i \cdot i = i^2 = (0; 1) \cdot (0; 1) = -1$. Taigi kompleksinį skaičių $z = (x; y)$ galima užrašyti taip:

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = (x; 0) + (0; 1)(y; 0) = x + iy.$$

Vadinasi, kompleksinis skaičių $z = (x; y)$ galima žymėti simboliu $x + iy$ (taip pat ir $z = x + yi$). Ši išraiška vadinama kompleksinio skaičiaus *algebrine forma*.

Atkreipiame dėmesį į tai, kad (3) formulės įsiminti nereikia. Ją galima gauti formaliai dauginant dvinarį $x_1 + iy_1$ ir dvinarį $x_2 + iy_2$ bei pasinaudojant lygybe $i^2 = -1$. Nesunku įsitikinti, kad $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ..., $i^{4k+p} = i^p$, $k \in N$, $p = 1, 2, 3$.

Kompleksinių skaičių aibę žymėsime raide C. Realiųjų skaičių aibė R yra kompleksinių skaičių aibės C poaibis (kiekvienas realusis skaičius yra ir kompleksinis skaičius, kurio menamoji dalis lygi nuliui).

Dviejų kompleksinių skaičių $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ *skirtumas* yra kompleksinis skaičius $z = x + iy$, tenkinantis lygybę $z_2 + z = z_1$. Iš čia

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2;\, y_1 - y_2). \qquad (4)$$

Kompleksinis skaičius $\bar{z} = x - iy$ vadinamas kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ *jungtiniu* skaičiumi.

Nesunku įsitikinti, kad $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$. Dviejų skaičių, $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ $(z_2 \neq 0)$, *dalmeniu* vadinamas toks kompleksinis skaičius $z = x + iy$, su kuriuo $z_2 \cdot z = z_1$. Iš čia

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (5)$$

Taigi dalijant kompleksinį skaičių iš nelygaus nuliui kompleksinio skaičiaus, reikia trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginti iš vardiklio jungtinio kompleksinio skaičiaus ir atlikti veiksmus.

1 pavyzdys. Rasime kompleksinių skaičių $z_1 = 3 - 4i$ ir $z_2 = -1 + 5i$ sumą $z_1 + z_2$, skirtumą $z_1 - z_2$, sandaugą $z_1 \cdot z_2$ ir dal menį $\frac{z_1}{z_2}$.

Sprendimas. Remdamiesi (2), (4), (3), ir (5) formulėmis, gauname:

$$z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (-1 + 5i) = (3 + (-1)) + i(-4 + 5) = 2 + i;$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 4i) - (-1 + 5i) = (3 - (-1)) - i(-4 - 5) = 4 - 9i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 4i) \cdot (-1 + 5i) = -3 + 15i + 4i + 20 = 17 + 19i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 4i}{-1 + 5i} = \frac{(3 - 4i)(-1 - 5i)}{(-1 + 5i)(-1 - 5i)} = -\frac{(3 - 4i)(1 + 5i)}{1 + 25} =$$

$$= -\frac{23 + 11i}{26} = -\frac{23}{26} - \frac{11}{26}i.$$

2 pavyzdys. Rasime, su kuriomis x ir y reikšmėmis teisinga lygybė $\dfrac{x-2+(y-3)i}{1+i}=1-3i.$

Sprendimas. Lygybę padauginę iš $1+i$, gauname:

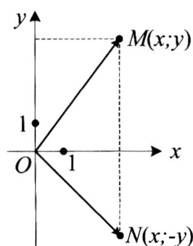
$$x-2+(y-3)i=(1-3i)(1+i) \Rightarrow x-2+i(y-3)=4-2i.$$

Pagal (1) formulę $x-2=4$, $y-3=-2$; todėl $x=6$, $y=1$.

Ats.: $x=6$, $y=1$.

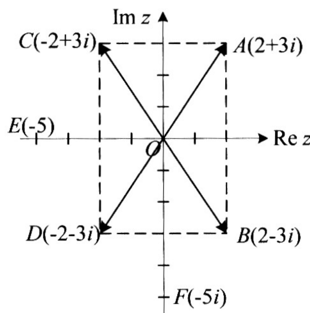
2. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ GEOMETRINIS VAIZDAVIMAS. MODULIS IR ARGUMENTAS

Sakykime, kad plokštumoje pasirinkta Dekarto koordinačių sistema xOy (1 pav.). Tada kiekvienam kompleksiniam skaičiui $z=x+iy$ galima priskirti plokštumos tašką $M(x;y)$ ir atvirkščiai. Jungtinį kompleksinį skaičių $\bar{z}=x-iy$ atitinka taškas $N(x;-y)$. Skaičiai $z=x+0\cdot i$ yra vaizduojami abscisių ašies (realiosios ašies $\operatorname{Re} z$) taškais, o skaičiai $z=0+iy$ – ordinačių ašies (me namosios ašies $\operatorname{Im} z$) taškais. Kompleksinį skaičių $z=x+iy$ galima pavaizduoti ir vektoriumi $\overrightarrow{OM}$.



1 pav.

Skaičius $z=x+iy$ vadinamas taško M arba vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ *kompleksine koordinate*. Rašome: $M(z)$, $\overrightarrow{OM}(z)$. 2 paveiksle pavaizduoti taškai $A(2+3i)$, $B(2-3i)$, $C(-2+3i)$, $D(-2-3i)$, $E(-5)$, $F(-5i)$.



2 pav.

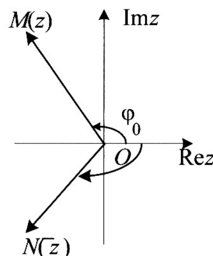
Kompleksinio skaičiaus $z=x+iy$ *moduliu* vadinamas jį vaizduojančio vektoriaus ilgis. Modulis yra žymimas $|z|$. Taigi

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (6)$$

Aišku, kad skaičiaus $z = x + iy$ ir jam jungtinio skaičiaus $\bar{z} = x - iy$ moduliai yra lygūs:

$$|z| = |\bar{z}|.$$

Orientuoto kampo φ, kurį sudaro vektorius $\overrightarrow{OM}$ su teigiamąja pusaše Rez (tikslumu iki dėmens $2k\pi$, $k \in Z$), didumas vadinamas skaičiaus $z = x + iy$ *argumentu* ir žymimas Arg$z$ (3 pav.).



3 pav.

Intervalui $(-\pi; \pi]$ priklausanti kampo φ reikšmė vadinama *pagrindine argumento reikšme* ir žymima $\varphi_0 = \arg z$. Taigi

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in Z. \tag{7}$$

Akivaizdu, kad

$$\arg \bar{z} = -\arg z.$$

Pastaba. Kartais pagrindine argumento reikšme vadinamas kampas iš intervalo $[0; 2\pi)$.

Skaičiaus $z = 0$ argumentas yra neapibrėžtas, o modulis lygus nuliui.

Iš kompleksinio skaičiaus modulio ir argumento apibrėžimų išplaukia, kad

$$x = |z| \cos\varphi, \quad y = |z| \sin\varphi. \tag{8}$$

Iš čia

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{9}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{10}$$

Taigi kompleksinį skaičių galima užrašyti vadinamąja *trigonometrine forma*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{11}$$

Priklausomai nuo taško $M(z)$ padėties koordinačių sistemoje skaičiaus $z = x + iy$ argumento pagrindinė reikšmė φ_0 apskaičiuojama taip:

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ kai } x > 0 \text{ (I ir IVketvirčiai)}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ kai } x < 0,\ y > 0 \text{ (II ketvirtis)}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ kai } x < 0,\ y < 0 \text{ (III ketvirtis)}, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ kai } x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ kai } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \qquad (12)$$

3 pavyzdys. Skaičius:

1) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 2) $z = -\sqrt{3} + i$; 3) $z = -2 - 2i$

užrašykime trigonometrine forma (imdami tik pagrindinę argumento reikšmę).

Sprendimas. 1) Čia $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$; todėl $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$. Kadangi z yra ketvirtame ketvirtyje, tai

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$

ir

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

2) Kadangi $|z| = \sqrt{3+i} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ir z yra antrame ketvirtyje, tai

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Taigi

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

3) Turime: $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Kadangi z yra trečiajame ketvirtyje, tai

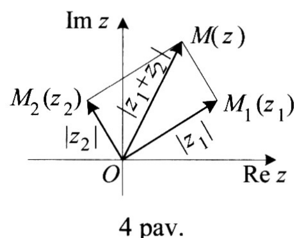
$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

ir

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Kai kompleksiniai skaičiai vaizduojami vektoriais, tai skaičių sudėtį ir atimtį galima atlikti pagal vektorių sudėties ir atimties taisykles.

Sakykime, kad $z_1 = x_1 + iy_1$ vaizduojamas vektoriumi $\overrightarrow{OM_1}$, o $z_2 = x_2 + iy_2$ – vektoriumi $\overrightarrow{OM_2}$. Šių skaičių suma $z = z_1 + z_2$ vaizduojama vektoriumi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (4 pav.), o jų skirtumas $z = z_1 - z_2$ – vektoriumi $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ (5 pav.).



4 pav.

Iš trikampio nelygybės išplaukia, kad

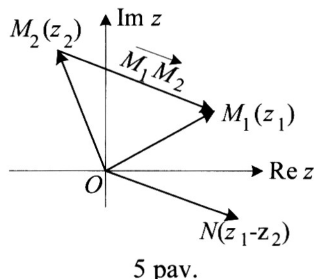
$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{13}$$

Lygybė galima tik tada, kai $\arg z_1 = \arg z_2$, t. y. kai vektoriai $\overrightarrow{OM_1}$ ir $\overrightarrow{OM_2}$ yra kolinearūs ir vienakrypčiai.

Vektoriaus

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_1M_2}$$

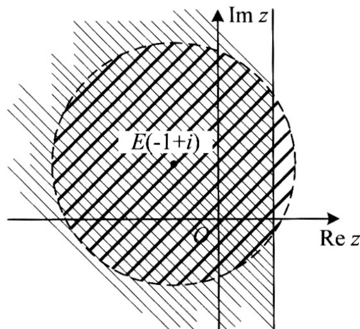
ilgis reiškia atstumą tarp taškų $M_1(z_1)$ ir $M_2(z_2)$. Taigi lygtis $|z - z_0| = a,\ a > 0$, reiškia, kad kompleksinių skaičių z vaizdai sudaro apskritimą, kurio centras taške z_0, o spindulys a. Aišku, kad nelygybę $|z - z_0| \le a$ tenkina kompleksiniai skaičiai, kurių vaizdai priklauso skrituliui su centru z_0 ir spinduliu a.



5 pav.

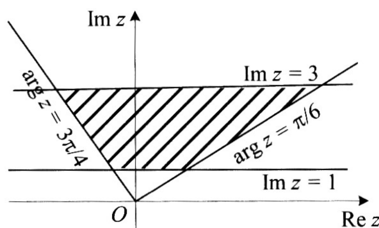
4 pavyzdys. Pavaizduokime plokštumos sritį, apibrėžtą nelygybėmis: a) $|z+1-i|<3$, $\operatorname{Re} z \le 1$; b) $\frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}$, $1 \le \operatorname{Im} z \le 3$.

Sprendimas. a) Kadangi $|z+1-i| = |z-(-1+i)| < 3$, tai šią nelygybę tenkina kompleksiniai skaičiai, vaizduojami skrituliu, kurio centras $z_0 = -1+i$, o spindulys a (be kontūro). Kadangi $\operatorname{Re} z = x$, tai nelygybę $\operatorname{Re} z \le 1$ tenkina visi plokštumos taškai, kurių realiosios dalys ne didesnės už 1. Ieškomoji sritis yra abiejų sričių bendroji dalis. Ji pavaizduota 6 paveiksle (užbrūkšniuota du kartus).



6 pav.

b) Kompleksinių skaičių z, kurių $\arg z = \frac{\pi}{6}$, vaizdai yra spindulyje, su $\operatorname{Re} z$ ašimi sudarančiame kampą $\frac{\pi}{6}$; o kompleksinių skaičių, kurių $\arg z = \frac{3\pi}{4}$, vaizdai yra spindulyje, su $\operatorname{Re} z$ ašimi sudarančiame kampą $\frac{3\pi}{4}$. Nelygybę $1 \le \operatorname{Im} z \le 3$ tenkina taškai $z = x + iy$, esantys juostoje tarp tiesių $y = 1$ ir $y = 3$. Sritis, tenkinanti abi sąlygas, pavaizduota 7 paveiksle.



7 pav.

Remdamiesi kompleksinio skaičiaus trigonometrine forma (11), išsiaiškinkime kompleksinių skaičių daugybos geometrinę prasmę.

Jeigu $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ir $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, tai

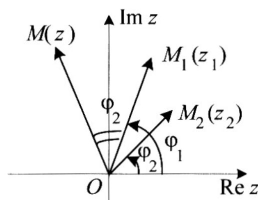
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 +$$

$$+ i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (14)$$

Matome, kad dauginant du kompleksinius skaičius, jų moduliai sudauginami, o argumentai sudedami:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \qquad (15)$$

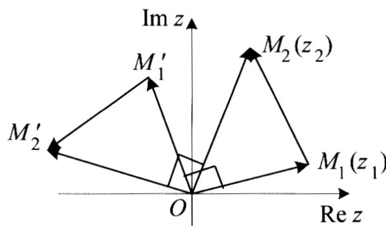


8 pav.

Vektorius $\overrightarrow{OM}$, kuris vaizduoja sandaugą $z_1 \cdot z_2$, gaunamas iš vektoriaus $\overrightarrow{OM_1}$, vaizduojančio skaičių z_1, pasukant jį kampu $\varphi_2 = \arg z_2$, o jo ilgį padidinant iš $|z_2|$ (8 pav.).

Pavyzdžiui, kompleksinį skaičių z dauginant iš i, vektorius $\overrightarrow{OM}(z)$ pasukamas kampu $\frac{\pi}{2}$ (prieš laikrodžio rodyklę), nes $\arg i = \frac{\pi}{2}$. Vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ ilgis nesikeičia, nes $|i| = 1$.

9 paveiksle pavaizduota kompleksinio skaičiaus $z_2 - z_1$ sandauga iš i. Kompleksinis skaičius $(z_2 - z_1)i$ vaizduojamas vektoriumi $\overrightarrow{M_1'M_2'}$, kuris gautas iš vektoriaus $\overrightarrow{M_1M_2}$, pasukto kampu $\frac{\pi}{2}$. Vektorių $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir $\overrightarrow{M_1'M_2'}$ moduliai yra lygūs. Daugindami kompleksinį skaičių $z_2 - z_1$ iš $\cos\alpha + i\sin\alpha$, vektorių $\overrightarrow{M_1M_2}$ pasukame kampu α.



9 pav.

Dalydami du kompleksinius skaičius, išreikštus trigonometrine forma, gauname:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) =$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (16)$$

Taigi dalijant kompleksinį skaičių z_1 iš skaičiaus z_2 $(z_2 \neq 0)$, reikia skaičiaus z_1 modulį padalyti iš skaičiaus z_2 modulio ir iš skaičiaus z_1 argumento atimti skaičiaus z_2 argumentą:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2. \qquad (17)$$

3. KĖLIMAS LAIPSNIU IR ŠAKNIES TRAUKIMAS

Sudauginkime n kompleksinių skaičių z_k, $k=1,2,...,n$, išreikštų trigonometrine forma. Jeigu $z_k=|z_k|(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k)$, $k=1,2,...,n$, tai

$$z_1\cdot z_2\cdot...\cdot z_n=|z_1|\cdot|z_2|\cdot...\cdot|z_n|(\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)+$$
$$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)). \qquad (18)$$

Kai $z_1=z_2=...=z_n=z$, gauname vadinamą Muavro (Abraham de Moivre, 1667–1754, prancūzų matematikas) formulę:

$$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (19)$$

Vadinasi,

$$\left|z^n\right|=\left|z\right|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n=n\operatorname{Arg} z. \qquad (20)$$

5 pavyzdys. Reiškinį $w=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{40}$ užrašykime algebrine forma.

Sprendimas. Pertvarkydami reiškinį, gauname:

$$w_n=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{40}=\left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}\right)^{40}=$$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{40}=\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{40}=$$

$$= \cos\frac{7\cdot 40\pi}{12} + i\sin\frac{7\cdot 40\pi}{12} = \cos\left(22\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(22\pi + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Kompleksinio skaičiaus z *n-ojo laipsnio šaknimi* (žym. $\sqrt[n]{z}$) vadinamas toks kompleksinis skaičius w, kurio n-asis laipsnis lygus z, t. y. $\sqrt[n]{z} = w$, jei $w^n = z$.

Jeigu $z = |z|(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, tai

$$w = \sqrt[n]{|z|(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)} =$$

$$= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in Z. \tag{21}$$

Dėl sinuso ir kosinuso periodiškumo gauname n skirtingų šaknies reikšmių:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right), \tag{22}$$

$$k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Realusis skaičius $\sqrt[n]{|z|} \geq 0$ vadinamas aritmetine šaknies reikšme.

6 pavyzdys. Raskime visas kompleksinio skaičiaus $z = 1$ šaknies $\sqrt[6]{1}$ reikšmes ir jas pavaizduokime geometriškai.

Sprendimas. Pagal (22) formulę gauname:

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{\cos 0 + i\sin 0} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{6}\right) = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3},$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

Taigi turime šešias reikšmes:

$$w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

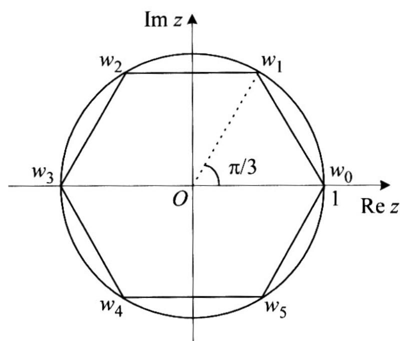
$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_3 = \cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6} = -1,$$

$$w_4 = \cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_5 = \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



10 pav.

Visos šešios šaknies $\sqrt[6]{1}$ reikšmės pavaizduotos 10 paveiksle.

7 pavyzdys. Raskime visas skirtingų kompleksinių skaičių poras, kurių kiekvienas skaičius lygus kito skaičiaus kvadratui.

Sprendimas. Sakykime, kad (z_1, z_2) – sąlygoje nurodyta kompleksinių skaičių pora, t. y. tenkinanti sąlygas: $z_1 \neq z_2$, $z_1 = z_2^2$, $z_2 = z_1^2$.

Sprendžiame šią lygčių sistemą

$$\begin{cases} z_1 = z_2^2, \\ z_2 = z_1^2. \end{cases}$$

Skaičiaus z_2 išraišką įrašę į pirmąją lygtį, gauname:

$$z_1^4 - z_1 = 0 \Rightarrow (z_1^3 - z_1) \cdot z_1 = 0.$$

Iš čia

$$(z_1)_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2 \text{ ir } (z_1)_3 = 0.$$

Todėl $(z_1)_0 = 1$,

$$(z_1)_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(z_1)_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(z_1)_3 = 0.$$

Iš lygties $z_2 = z_1^2$ gauname:

$$(z_2)_0 = 1^2 = 1,$$

$$(z_2)_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(z_2)_2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(z_2)_3 = 0.$$

Taigi lygčių sistemos sprendiniai tokie:

$$(1; 1), \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ir } (0; 0).$$

Sąlygą $z_1 \neq z_2$ tenkina tik pora $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ats.: $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ TAIKYMAI

1. Kompleksiniai skaičiai algebroje

7 pavyzdys. Remdamiesi kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 sandaugos modulio (15) savybe, raskime bent vieną lygties

$$x^2 + y^2 = 21\,125$$

natūralųjį sprendinį.

Sprendimas. Kadangi $21\,125 = 5^3 \cdot 13^2$ ir

$$5 = |2 + i|^2 = |(2+i)\cdot(2+i)|,\ 13 = |3+2i|^2 = |(3+2i)\cdot(3+2i)|,$$

tai

$$21\,125 = |(2+i)\cdot(2+i)|^3 \cdot |(3+2i)\cdot(3+2i)|^2 =$$

$$= |(2+i)\cdot(2+i)\cdot(2+i)\cdot(3+2i)\cdot(3+2i)|^2 = |79i - 122|^2 = 122^2 + 79^2.$$

Taigi $x=122$, $y=79$.

Ats.: (122; 79).

2. Kompleksiniai skaičiai trigonometrijoje

8 pavyzdys. Funkcijas $\sin 3x$ ir $\cos 3x$ išreikškime funkcijomis $\sin x$ ir $\cos x$.

Sprendimas. Pagal (19) formulę $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$. Kadangi

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x\cdot\sin x\cdot i - 3\cos x\cdot\sin^2 x\cdot i - i\sin^3 x =$$
$$= \cos^3 x - 3\cos x\cdot\sin^2 x + i(3\cos^2 x\cdot\sin x - \sin^3 x),$$

tai

$$\cos 3x + i\sin 3x = \cos^3 x - 3\cos x\cdot\sin^2 x + i(3\cos^2 x\cdot\sin x - \sin^3 x).$$

Iš čia gauname formules:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\cdot\sin^2 x,$$
$$\sin 3x = 3\cos^2 x\cdot\sin x - \sin^3 x.$$

9 pavyzdys. Apskaičiuokime sumas:

$$S_1 = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$

ir

$$S_2 = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx,$$

kai $x \neq 2k\pi$, $k\in N$, $n\in N$.

Sprendimas. Abi šias sumas apskaičiuokime kartu. Jei kompleksinį skaičių $\cos x + i\sin x$ pažymėsime z, tai taikydami Muavro ir baigtinės geometrinės progresijos narių sumos formulę gausime

$$S_1 + iS_2 = (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \ldots + (\cos nx + i\sin nx) =$$
$$= z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z - z^{n+1}}{1-z}.$$

Tada: $\dfrac{z - z^{n+1}}{1-z} = \dfrac{\cos x + i\sin x - [\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x]}{1 - \cos x - i\sin x} =$

$$= \frac{\cos x - \cos(n+1)x + i[\sin x - \sin(n+1)x]}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{n+2}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2} - i\cdot 2\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{n+2}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{n+2}{2}x - i\cos\frac{n+2}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{nx}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{n+2}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{n+2}{2}x\right)\right]}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left[\cos\left(\frac{n+2}{2} - \frac{1}{2}\right)x + i\sin\left(\frac{n+2}{2} - \frac{1}{2}\right)x\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left[\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x\right].$$

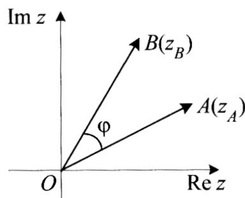
Vadinasi, $S_1 = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$, $S_2 = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

3. Kompleksiniai skaičiai geometrijoje

Remdamiesi kompleksiniais skaičiais, išnagrinėkime keletą geometrinių teiginių.

a) *Vektorių statmenumas, kolinearumas. Trijų taškų priklausymas tiesei.*

11 paveiksle pavaizduoti du vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$, kurių kompleksinės koordinatės atitinkamai yra z_A ir z_B. Simboliu $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ pažymėkime kampą tarp vektorių $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$. Akivaizdu, kad



11 pav.

$$\varphi = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg z_B - \arg z_A = \arg\frac{z_B}{z_A}.$$

Kampas φ lygus nuliui arba π tik tada, kai $\frac{z_B}{z_A}$ yra realusis skaičius.

Taigi vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ yra kolinearūs (taškai O, A ir B yra vienoje tiesėje) tik tada, kai $\frac{z_B}{z_A}$ yra realusis skaičius.

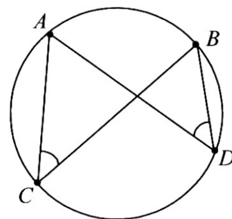
Kai $\varphi = \frac{\pi}{2}$, (kai $\frac{z_B}{z_A}$ yra menamasis skaičius), vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ yra statmeni.

Trys taškai $A(z_A)$, $B(z_B)$ ir $C(z_C)$ yra vienoje tiesėje tik tada, kai vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearūs.

Pavyzdžiui, taškai $A(2+5i)$, $B(1+3i)$ ir $C(i)$ yra vienoje tiesėje, nes

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i-2-5i}{1+3i-2-5i} = \frac{-2-4i}{-1-2i} = 2 \in R.$$

b) *Keturių taškų priklausymas apskritimui.*



12 pav.

Sakykime, taškai $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ ir $D(z_D)$ priklauso apskritimui (12 pav.). Tada $\angle ACB = \angle ADB$, t. y. $\arg\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \arg\frac{z_A - z_D}{z_B - z_C}$, arba $\arg\frac{z_A - z_B}{z_B - z_C} : \arg\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$ yra realusis

skaičius. Teisingas ir atvirkščias teiginys.

Pavyzdžiui, taškai

$$A(4-i),\ B(-i),\ C((2-2\sqrt{2})+i) \text{ ir } D(1+\sqrt{3}+i(2+\sqrt{3})$$

priklauso apskritimui, nes

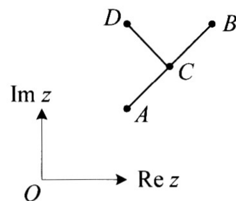
$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}(1+i)$$

ir

$$\frac{z_A-z_B}{z_B-z_C}:\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}=\frac{2+\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}\in R.$$

10 pavyzdys. 13 paveiksle pavaizduoti keturi taškai: *A*, *B*, *C* ir *D*. Be to, $AC=CB=CD$ ir $DC\perp AB$. Raskime taško *D* kompleksinę koordinatę, jeigu taškų *A* ir *B* kompleksinės koordinatės yra z_A ir z_B.

Sprendimas. Vektoriaus $\overrightarrow{OC}$ kompleksinė koordinatė yra $z_C=\dfrac{z_A+z_B}{2}$. Vektorius $\overrightarrow{CD}$ yra gaunamas vektorių $\overrightarrow{CB}$ pasukus $\dfrac{\pi}{2}$ kampu. Kadangi vektoriaus $\overrightarrow{CB}$ kompleksinė koordinatė



13 pav.

yra $z_B-z_C=\dfrac{z_B-z_A}{2}$, tai vektoriaus $\overrightarrow{CD}$ koordinatė yra $i\cdot\dfrac{z_B-z_A}{2}$. Iš lygybės $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$ randame z_D:

$$z_D=\frac{1}{2}(z_A+z_B)+i\frac{z_B-z_A}{2}.$$

Ats.: $z_D=\dfrac{1}{2}(z_A+z_B)+i\dfrac{z_B-z_A}{2}$.

11 pavyzdys. Trikampio *ABC* išorėje nubrėžti kvadratai *ABDE*, *CBFG* ir *CKLA* (14 pav.). Jų centrai atitinkamai yra *M*, *N* ir *P*. Įrodykime, kad $NP=CM$ ir $NP\perp CM$.

Sprendimas. Sakykime, kad taškų *A*, *B* ir *C* koordinatės yra z_A, z_B ir z_C. Tada pagal 10 pavyzdį

$$z_P = \frac{z_C + z_A}{2} + i\frac{z_C - z_A}{2}, \quad z_N = \frac{z_B + z_C}{2} + i\frac{z_B - z_C}{2}$$

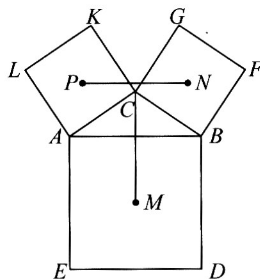
bei

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} + i\frac{z_A - z_B}{2}$$

ir

$$z_P - z_N = \frac{z_A - z_B}{2} + i\frac{2z_C - z_A - z_B}{2},$$

$$z_M - z_C = \frac{-2z_C + z_A + z_B}{2} + i\frac{z_A - z_B}{2}.$$



14 pav.

Matome, kad $z_M - z_C = i(z_P - z_N)$. Taigi vektorių $\overrightarrow{NP}$ pasukus $\frac{\pi}{2}$ kampu gauname vektorių $\overrightarrow{CM}$. Vadinasi, $CM = NP$ ir $NP \perp CM$.

PASITRENIRUOKITE

Šių uždavinių sprendimų nereikia siųsti patikrinti.

1. Kompleksinį skaičių $\dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ užrašykite algebrine forma.

Ats.: $\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i.$

2. Apskaičiuokite $1 + i + i^2 + ... + i^{2009}$.
Ats.: $1 + i.$

3. Raskite vektorių, į kurį pereis vektorius $\vec{a}(3+4i)$, du kartus pailgintas ir pasuktas 120° kampu.
Ats.: $-3 - 4\sqrt{3} + i(3\sqrt{3} - 4).$

4. Išspręskite lygtį $|z|-z=1+2i$.

Ats.: $\frac{3}{2}-2i$.

5. Kokiu kampu reikia pasukti vektorių $\vec{a}\left(3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}\right)$, kad gautume vektorių $\vec{b}(-5+i)$?

Ats.: $\frac{3\pi}{4}$.

6. Pavaizduokite plokštumos taškų, kurių koordinatės tenkina nelygybes $|z|\geq 1$, $|z+1|\leq 2$, $-\frac{\pi}{2}\leq \arg z\leq \frac{3\pi}{4}$, aibę.

7. Apskaičiuokite sumas:

a) $S_1=\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x$,

$S_2=\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x$;

b) $S_1=\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\ldots+\sin 99x$,

$S_2=\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\ldots+\cos 99x$.

Ats.: a) $S_1=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$, $S_2=\frac{\sin^2 nx}{2\sin x}$, kai $\sin x\neq 0$;

b) $S_1=\frac{\sin 50x\cdot\cos 49{,}5x}{\cos 0{,}5x}$, $S_2=\frac{\cos 50x\cdot\cos 49{,}5x}{\cos 0{,}5x}$,

kai $\cos 0{,}5x\neq 0$.

8. Išspręskite lygtį $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

Ats.: $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-1$, $z_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$z_5=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. Išspręskite lygtį $(z+i)^4-(z-i)^4=0$.

Nurodymas. Lygtį padalykite iš $(z-i)^4$ ir raskite visas $\dfrac{z+i}{z-i}$ reikšmes.

Ats.: 0; 1; –1.

10. Jeigu $w=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tai taškai $A(z_0)$, $B(wz_0)$ ir $C(w^2z_0)$ yra lygiakraščio trikampio viršūnės (čia $z_0\neq 0$). Įrodykite.

11. Trikampio ABC viršūnių koordinatės yra z_A, z_B ir z_C. Raskite sąlygą, kad trikampis ABC būtų: a) statusis lygiašonis su $\angle C=90^\circ$; b) lygiakraštis.

Ats.: a) $z_C-z_A=i(z_C-z_B)$; b) $z_C-z_A=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_C-z_B)$.

12. Trikampio ABC kraštinės AC ir BC pasuktos atitinkamai $+\dfrac{\pi}{2}$ ir $-\dfrac{\pi}{2}$ kampais apie taškus A ir B ir užima AM ir BN padėtį. Įrodykite, kad $PA=PB$ ir $PA\perp PB$, jei taškas P yra atkarpos MN vidurys.

13. Vienoje atkarpos AB, kurios ilgis $a+b$, pusėje nubrėžti kvadratai $ACDE$ ir $CBFG$, kurių kraštinės $AC=a$ ir $CB=b$. Šių kvadratų centrai O_1 ir O_2 atkarpomis sujungti su atkarpos AB vidurio tašku P. Apskaičiuokite kampo O_1PO_2 didumą.

Nurodymas. Koordinačių sistemą pasirinkite taip, kad atkarpa AB būtų realiojoje ašyje, o atkarpa CG – menamojoje ašyje. Apskaičiuokite taškų O_1, O_2 ir P koordinates, kai $z_B=b$ ir $z_A=-a$.

Ats.: $\angle O_1PO_2=\dfrac{\pi}{2}$.

14. Trys lygiakraščiai trikampiai OAA', OBB', OCC', turintys tik vieną bendrą tašką O, yra išdėstyti prieš laikrodžio rodyklę. Įrodykite, kad atkarpų $A'B$, $B'C$ ir $C'A$ vidurio taškai M, N ir P yra lygiakraščio trikampio viršūnės.

Nurodymas. Sakykime, kad taškų A, B ir C koordinatės yra z_A, z_B ir z_C. Raskite taškų M, N ir P koordinates ir įrodykite, kad vektorius $\overrightarrow{PN}$ yra gaunamas iš vektoriaus $\overrightarrow{PM}$, pasukto jį kampu $\frac{\pi}{3}$.

15. a) Įrodykite, kad kompleksiniai skaičiai $z_1 = (5-i)^4(1+i)$ ir $z_2 = 956 - 4i$ yra lygūs;

b) Sakykime, kad $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{239}$, $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Remdamiesi įrodyta lygybe $z_1 = z_2$, apskaičiuokite $4\alpha - \beta$ reikšmę.

Nurodymas. Raskite skaičių z_1 ir z_2 argumentus.

Ats.: $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

Pastaba. Remdamasis šia lygybe, Dž. Mašenas (John Machin, 1680–1751, anglų matematikas) 1706 metais apskaičiavo skaičiaus π 100 tikslių skaitmenų po kablelio.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Su kuriomis x ir y reikšmėmis kompleksiniai skaičiai $z_1 = (x+y)^2 - \frac{6}{i} - x$ ir $z_2 = -y - 1 + 5i(x+y)$ yra lygūs?

2. Raskite Re w, Im w, arg w, kai $w = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{20}$.

3. Kokiu kampu reikia pasukti vektorių $\vec{a}(4-3i)$, kad gautume vektorių $\vec{b}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{2}}i\right)$?

4. Pavaizduokite plokštumos taškų, kurių kompleksinės koordinatės tenkina nelygybes: $|z-1+i|\leq 4$, $-\frac{\pi}{4}\leq \arg\bar{z}\leq\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z\geq -2$, aibę.

5. Su kuriomis n reikšmėmis teisinga lygybė $(1+i)^n=(1-i)^n$?

6. Raskite skirtingų kompleksinių skaičių poras, kurių kiekvienas skaičius lygus kito skaičiaus kubui.

7. Raskite bent vieną lygties $x^2+y^2=32\,045$ natūralųjį sprendinį.

8. Funkcijas $\sin 4x$ ir $\cos 4x$ išreikškite funkcijomis $\sin x$ ir $\cos x$.

9. Apskaičiuokite reiškinio $\alpha^{999}+4\alpha^{666}+5\alpha^{66}+1998$ reikšmę, jei α yra lygties $z^2+z+1=0$ sprendinys.

10. Trikampio ABC išorėje nubrėžti kvadratai $ACFG$ ir $AEDB$. Įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinė AM yra statmena EG ir $AM=\frac{1}{2}EG$.



VI. KAI KURIOS PLANIMETRIJOS TEOREMOS IR JŲ TAIKYMAI

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Matematikos pamokose sužinojote, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške; tokia pačia savybe pasižymi ir trikampio pusiaukampinės bei aukštinės. Minėtos savybės yra bendresnių teoremų, su kuriomis susipažinsite atlikdami šią užduotį, atskiri atvejai.

Sakykime, kad pasirinkta atkarpa *AB* ir teigiamas skaičius *k*. Įrodykite, kad atkarpoje *AB* egzistuoja vienintelis taškas *C*, kad $AC:CB=k$. Kadangi iš sąlygos $AC:CB=k$ išplaukia vektorinė lygybė $\vec{AC}=k\vec{CB}$, tai $\vec{AC}=k(\vec{AB}-\vec{AC})$, arba $(1+k)\vec{AC}=k\vec{AB}$ ir $\vec{AC}=\frac{k}{1+k}\vec{AB}$. Taigi taško *C* egzistavimas įrodytas. Tarkime, kad atkarpoje *AB* yra kitas taškas *D* – toks, kad $AD:DB=k$. Tuomet $\vec{AD}=k\vec{DB}$ ir

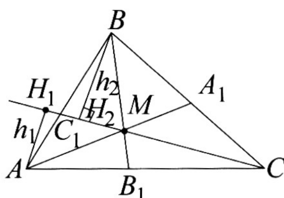
$$\vec{CD}=\vec{AD}-\vec{AC}=k\vec{DB}-k\vec{CB}=k(\vec{DB}-\vec{CB})=$$
$$=-k(\vec{BD}-\vec{BC})=-k\vec{CD},\ \text{t. y. } (1+k)\vec{CD}=\vec{0}.$$

Kadangi $k>0$, tai $1+k\neq 0$ ir $\vec{CD}=\vec{0}$, t. y. taškai *C* ir *D* sutampa.

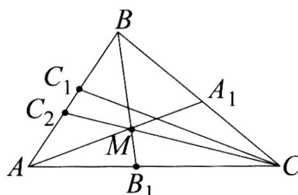
Čevos teorema (Giovanni Ceva, 1648–1734, italų matematikas ir inžinierius). Trikampio *ABC* kraštinėse *AB*, *BC* ir *CA* atitinkamai pažymėti taškai C_1, A_1, B_1. Atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške tada ir tik tada, kai $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta taške *M*; h_1 ir h_2 – atstumai nuo taškų *A* ir *B* iki tiesės *CM* (1 pav.). Tuomet $S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}CM\cdot h_1$, $S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}CM\cdot h_2$ ir

$\dfrac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta BMC}} = \dfrac{h_1}{h_2}$. Iš trikampių AH_1C_1 ir BH_2C_1 panašumo turime lygybę $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$. Taigi $\dfrac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta BMC}} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$. Analogiškai įsitikiname, kad $\dfrac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta BMA}} = \dfrac{CB_1}{B_1A}$, $\dfrac{S_{\Delta BMA}}{S_{\Delta AMC}} = \dfrac{BA_1}{A_1C}$. Iš gautųjų lygybių išplaukia, kad $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$.



1 pav.



2 pav.

Pakankamumas. Sakykime, kad yra teisinga lygybė $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$, atkarpos AA_1 ir BB_1 susikerta taške M, bet tiesė CC_1 neina per tašką M (2 pav.). Jei tiesė CM kerta trikampio kraštinę AB taške C_2, tai (kaip įrodėme) yra teisinga lygybė $\dfrac{AC_2}{C_2B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$. Iš šių lygybių gauname, kad $\dfrac{AC_2}{C_2B} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$. Kadangi atkarpoje AB yra tik vienas taškas, dalijantis ją duotuoju santykiu, tai iš čia išplaukia, kad taškai C_1 ir C_2 sutampa, t. y. atkarpa CC_1 eina per tašką M.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad Čevos teorema yra teisinga ir tada, kai vienas iš taškų A_1, B_1 ir C_1 yra trikampio kraštinėje, o kiti du – kraštinių tęsiniuose. Įrodymas šiuo atveju analogiškas.

Taikant įrodytąją teoremą uždaviniams spręsti, svarbu teisingai užrašyti atkarpų santykius. Galima naudoti paprastą taisyklę: pradėti nuo bet kurios trikampio viršūnės (pvz., A), eiti iki trikampio kraštinėje

esančio taško C_1, po to ta pačia kryptimi eiti iki kitos viršūnės B, vėl iki kraštinėje esančio taško A_1 ir t. t., iki grįžimo į viršūnę A.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad visos trys trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške. Toks pat teiginys galioja trikampio pusiaukampinėms ir aukštinėms.

Jei AA_1, BB_1 ir CC_1 yra trikampio ABC pusiaukraštinės, tai $AC_1 = C_1B$, $BA_1 = A_1C$ ir $CB_1 = B_1A$; todėl $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Tada pagal Čevos teoremą trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške; šis taškas vadinamas *trikampio sunkio centru*.

Jei AA_1, BB_1, CC_1 yra trikampio ABC pusiaukampinės, tai, kaip žinome, $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB}{BA}$, todėl $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} = 1$. Taigi (pagal Čevos teoremą) trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške; šis taškas yra į trikampį įbrėžto apskritimo centras.

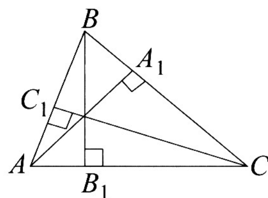
Jei AA_1, BB_1, CC_1 yra trikampio ABC aukštinės (3 pav.), tai

$$AC_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle A, \ C_1B = CC_1 \operatorname{ctg} \angle B \text{ ir } \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\operatorname{ctg} \angle A}{\operatorname{ctg} \angle B}.$$

Analogiškai

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\operatorname{ctg} \angle B}{\operatorname{ctg} \angle C},$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\operatorname{ctg} \angle C}{\operatorname{ctg} \angle A}.$$



3 pav.

Taigi

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Pagal Čevos teoremą trikampio aukštinės susikerta viename taške; šis taškas vadinamas trikampio *ortocentru*.

2 pavyzdys. Sakykime, kad taškai A_1, B_1, C_1 yra trikampio kraštinėse BC, CA ir AB; jie dalija trikampio perimetrą pusiau, t. y.

$AB + BA_1 = A_1C + CA, \quad BC + CB_1 = B_1A + AB, \quad CA + AC_1 = C_1B + BC.$

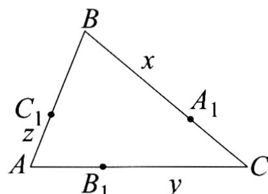
Įrodysime, kad tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške.

Įrodymas. Pažymėkime $BA_1 = x$, $CB_1 = y$, $AC_1 = z$ (4 pav.). Tuomet $A_1C = a - x$, $B_1A = b - y$, $C_1B = c - z$. Jei p – trikampio ABC pusperimetris, tai $AB + BA_1 = p$, t. y. $x = BA_1 = p - c$. Analogiškai $y = p - a$, $z = p - b$. Todėl

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{z}{c-z} = \frac{p-b}{c-(p-b)} = \frac{\frac{1}{2}(a+c-b)}{\frac{1}{2}(c+b-a)} = \frac{a+c-b}{c+b-a},$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{x}{a-x} = \frac{a+b-c}{a+c-b},$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{y}{b-y} = \frac{b+c-a}{a+b-c}.$$



4 pav.

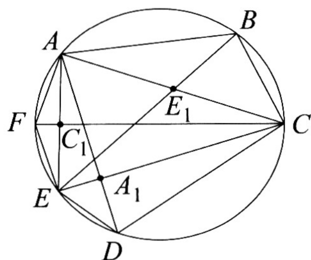
Kadangi $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, tai tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške.

3 pavyzdys. Įrodysime, kad įbrėžto į apskritimą šešiakampio $ABCDEF$ įstrižainės AD, BE ir CF susikerta viename taške tada ir tik tada, kai $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

Įrodymas. Sakykime, kad tiesės EB ir AC susikerta taške E_1, tiesės AD ir EC – taške A_1, o tiesės CF ir AE susikerta taške C_1 (5 pav.). Pagal sinusų teoremą

$$AE_1 = \frac{AB \sin \angle ABE}{\sin \angle AE_1B},$$

$$E_1C = \frac{BC \sin \angle EBC}{\sin \angle CE_1B}.$$



5 pav.

Kadangi $\angle AE_1B + \angle CE_1B = 180^\circ$, tai $\sin \angle AE_1B = \sin \angle CE_1B$ ir $\frac{AE_1}{E_1C} = \frac{AB \sin \angle ABE}{BC \sin \angle EBC}$. Analogiškai

$$\frac{CA_1}{A_1E} = \frac{CD \sin \angle CDA}{ED \sin \angle EDA},$$

$$\frac{EC_1}{C_1A} = \frac{EF \sin \angle EFC}{FA \sin \angle AFC}.$$

Kadangi $\angle ABE = \angle EDA$, $\angle EBC = \angle EFC$, $\angle CDA = \angle AFC$, tai

$$\frac{AE_1}{E_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1E} \cdot \frac{EC_1}{C_1A} = \frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot ED \cdot FA}.$$

Taikydami Čevos teoremą trikampiui ACE, gauname, kad tiesės AA_1, CC_1 ir EE_1 (o jose ir yra įstrižainės AD, CF ir BE) susikerta viename taške tada ir tada, kai $\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot ED \cdot FA} = 1$. Iš čia ir gauname sąlygą $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot ED \cdot FA$.

Menelajo teorema (Menelajas Aleksandrietis – I a. graikų mokslininkas). Sakykime, kad tiesėse BC, AC ir AB, kuriose yra trikampio ABC kraštinės, pažymėti taškai A_1, B_1 ir C_1; be to, arba visi jie yra trikampio kraštinių tęsiniuose, arba du iš jų yra trikampio kraštinėse, o trečiasis – kraštinės tęsinyje. Taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, kad tiesė l kerta trikampio ABC kraštines AB ir BC taškuose C_1 ir A_1, o kraštinės AC tęsinį – taške B_1 (6 pav.). Iš trikampio viršūnių nubrėžkime statmenis AA_2, BB_2 ir CC_2 į tiesę l. Kadangi trikampiai AA_2C_1 ir BB_2C_1 panašūs, tai $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA_2}{BB_2}$.

Analogiškai iš trikampių BA_1B_2 ir CA_1C_2 panašumo turime lygybę $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB_2}{CC_2}$, o iš trikampių AB_1A_2 ir CB_1C_2 panašumo lygybę $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CC_2}{AA_2}$. Iš čia gauname, kad

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

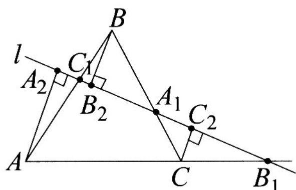
Pakankamumas. Sakykime, kad yra teisinga lygybė

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

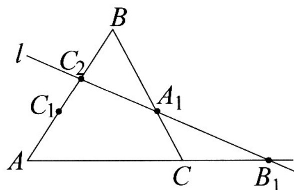
bet taškai A_1, B_1, C_1 nėra vienoje tiesėje (7 pav.). Tegu tiesė A_1B_1 kerta trikampio kraštinę AB taške C_2. Kadangi A_1, B_1 ir C_2 yra vienos tiesės taškai, tai (kaip jau įrodėme) galioja lygybė $\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

Tuomet $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC_2}{C_2B}$; taigi taškai C_1 ir C_2 sutampa.

Menelajo teoremos įrodymas nesikeičia, kai visi taškai A_1, B_1, C_1 yra trikampio kraštinių tęsiniuose. Norėdami teisingai surašyti atkarpų santykius, galime taikyti tą pačią taisyklę kaip ir Čevos teoremos atveju.



6 pav.

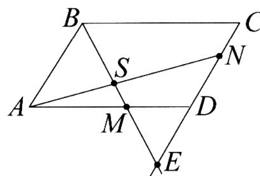


7 pav.

4 pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse AD ir CD yra taškai M ir N; be to, $AM:MD=p$, $DN:NC=q$, o tiesės BM ir AN susikerta taške S. Raskime santykį $AS:SN$ (8 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės BM ir CD susikerta taške E. Trikampiui AND ir trims tiesės taškams E, S, M taikydami Menelajo teoremą (atkreipiame dėmesį, kad taškai S ir M yra trikampio kraštinėse, o taškas E – kraštinės tęsinyje), gauname lygybę

$$\frac{AS}{SN}\cdot\frac{NE}{ED}\cdot\frac{DM}{MA}=1.$$



8 pav.

Iš trikampių ABM ir DEM panašumo išplaukia, kad

$$\frac{ED}{AB}=\frac{MD}{AM}=\frac{1}{p},$$

o iš čia

$$ED = \frac{1}{p} AB = \frac{1}{p} CD.$$

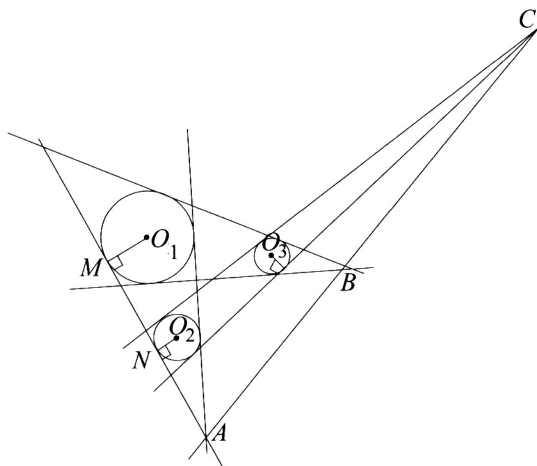
Kadangi $DN = \frac{q}{1+q} DC$, tai $EN = ED + DN = \left(\frac{q}{1+q} + \frac{1}{p} \right) CD$. Taigi

$$\frac{NE}{ED} = \frac{\frac{q}{1+q} + \frac{1}{p}}{\frac{1}{p}} = \frac{1+q+pq}{1+q}.$$

Kadangi $\frac{DM}{MA} = \frac{1}{p}$, tai $\frac{AS}{SN} \cdot \frac{1+q+pq}{1+q} \cdot \frac{1}{p} = 1$; todėl $\frac{AS}{SN} = \frac{p(1+q)}{1+q+pq}$.

5 pavyzdys. Plokštumoje yra trys skirtingų spindulių apskritimai, iš kurių nei vienas nėra kito viduje, o centrai O_1, O_2, O_3 nėra vienoje tiesėje. Apskritimų, kurių centrai O_1 ir O_2, išorinės liestinės susikerta taške A, apskritimų su centrais O_1 ir O_3 – taške B, o apskritimų su centrais O_2 ir O_3 – taške C (9 pav.). Įrodysime, kad taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje.

Įrodymas. Sakykime, kad r_1, r_2, r_3 – atitinkamų apskritimų spinduliai. Nubrėžkime statmenis O_1M ir O_2N į bendrą apskritimų su centrais O_1 ir O_2 išorinę liestinę (9 pav.). Iš trikampių O_1AM ir O_2AN panašumo gauname lygybę $\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{r_1}{r_2}$. Analogiškai $\frac{O_2C}{O_3C} = \frac{r_2}{r_3}$, $\frac{O_3B}{O_1B} = \frac{r_3}{r_1}$.



9 pav.

Nagrinėjame trikampį $O_1O_2O_3$ ir jo kraštinių tęsiniuose esančius

taškus A, B, C. Kadangi $\frac{O_1A}{AO_2}\cdot\frac{O_2C}{CO_3}\cdot\frac{O_3B}{BO_1}=1$, tai pagal Menelajo teoremą taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje.

6 pavyzdys. Apie trikampį ABC apibrėžtame apskritime pasirinkime tašką M ir iš jo nuleiskime statmenis MA_1, MB_1, MC_1 į tieses BC, AC, AB. Įrodysime, kad taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas M yra lanke BC (10 pav.). Tuomet iš stačiųjų trikampių AB_1M ir CB_1M gauname, kad

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AM\cos\angle MAC}{CM\cos\angle MCA}.$$

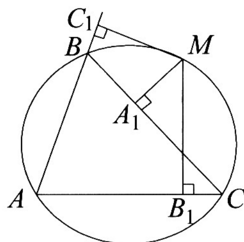
Analogiškai gauname lygybes

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CM\cos\angle MCB}{BM\cos\angle MBC},\quad \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BM\cos\angle MBC_1}{AM\cos\angle MAB}.$$

Kadangi $\angle MAC=\angle MBC$,

$$\angle MCA=180^\circ-\angle MBA=\angle MBC_1,$$
$$\angle MCB=\angle MAB,$$

tai $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$. Pagal Menelajo teoremą taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje. Ši tiesė yra vadinama Simsono tiese (Robert Simson, 1687–1768, anglų matematikas).

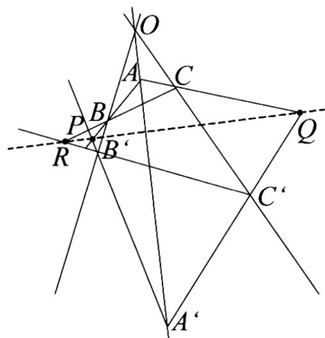


10 pav.

7 pavyzdys. Trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra tokie, kad jų atitinkamos kraštinės nelygiagrečios, o tiesės AA', BB' ir CC' eina per vieną tašką. Įrodysime, kad jų atitinkamų kraštinių susikirtimo taškai yra vienoje tiesėje.

Įrodymas. Sakykime, kad tiesės AA', BB' ir CC' susikerta taške O, tiesės AB ir $A'B'$ susikerta taške P, tiesės AC ir $A'C'$ – taške Q, o tiesės BC ir $B'C'$ – taške R (11 pav.). Trikampiui OBC ir jo kraštinių tęsiniuose esantiems tiesės taškams B', C' ir R taikome Menelajo teoremą ir gauname lygybę $\frac{OC'}{C'C}\cdot\frac{CR}{RB}\cdot\frac{BB'}{B'O}=1$. Analogiškai trikampiui OAB ir

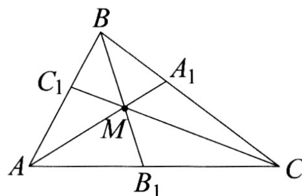
taškams A', B', P gauname lygybę $\frac{OA'}{A'A}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BB'}{B'O}=1$, o trikampiui OAC ir taškams A', C', Q – lygybę $\frac{OA'}{A'A}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CC'}{C''O}=1$. Iš antros lygybės gautą lygybę $\frac{A'A}{OA'}\cdot\frac{PB}{AP}\cdot\frac{B'O}{BB'}=1$ sudauginame su pirmąja ir trečiąja. Suprastinę gauname lygybę $\frac{CR}{RB}\cdot\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1$. Pagal Menelajo teoremą (taikant ją trikampiui ABC ir jo kraštinių tęsiniuose esantiems taškams P, Q, R) išplaukia, kad taškai P, Q, R yra vienoje tiesėje.



11 pav.

Įrodytasis teiginys yra Dezargo teorema; ji taip vadinama prancūzų matematiko Žeraro Dezargo (Gerard Desargues, 1593–1662), vieno iš projektyvinės geometrijos kūrėjų, garbei.

Van Obelio (Henriais Hubertus van Aubel, 1830–1906, olandų matematikas) **teorema.** Trikampio ABC kraštinėse AB, AC ir BC yra taškai C_1, B_1, A_1, atkarpos AA_1, BB_1 ir CC_1 kertasi taške M. Tuomet $\frac{AM}{MA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}$ (12 pav.).



12 pav.

Įrodymas. Pagal Čevos teoremą $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$. Iš čia $\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{AC_1}{C_1B}:\frac{AB_1}{B_1C}$.

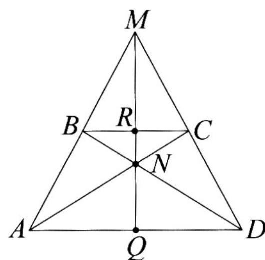
Trikampiui AA_1C ir trims tiesės taškams B, M, B_1 pritaikę Menelajo teoremą gauname lygybę $\frac{AM}{MA_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$. Kadangi

$$\frac{BC}{A_1B}=\frac{A_1B+A_1C}{A_1B}=1+\frac{A_1C}{A_1B}=\frac{\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}}{\frac{AB_1}{B_1C}},$$

tai

$$\frac{AM}{MA_1}=\frac{BC}{A_1B}\cdot\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Taikant van Obelio teoremą galima įrodyti trikampio pusiaukraštinių savybę: jei A_1, B_1, C_1 yra trikampio ABC kraštinių vidurio taškai, M – pusiaukraštinių susikirtimo taškas, tai $\frac{AM}{MA_1}=\frac{BM}{MB_1}+\frac{CM}{MC_1}=2.$ Kadangi $AC_1=C_1B$, $AB_1=B_1C$, tai $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AB_1}{B_1C}=1.$ Tada pagal van Obelio teoremą gauname lygybę $\frac{AM}{MA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}=2.$ Analogiškai įrodoma, kad $\frac{BM}{MB_1}=2$ ir $\frac{CM}{MC_1}=2.$



13 pav.

8 pavyzdys. Trapecijos $ABCD$ šoninės kraštinės AB ir CD susikerta taške M, įstrižainės susikerta taške N, o tiesė MN pagrindus AD ir BC kerta atitinkamai taškuose Q ir R (13 pav.). Raskime trapecijos pagrindų santykį, jei taškas N yra atkarpos MQ vidurio taškas.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos pagrindų ilgiai $AD=m$, $BC=n$. Iš trikampių BMC ir AMD panašumo išplaukia, kad $\frac{AM}{MB}=\frac{AD}{BC}=\frac{m}{n}$. Iš čia $\frac{MB+AB}{MB}=\frac{m}{n}$; todėl $\frac{AB}{MB}=\frac{m-n}{n}$. Analogiškai gauname, kad $\frac{CD}{MC}=\frac{m-n}{n}$. Pagal van Obelio teoremą

$$\frac{MN}{NQ}=\frac{MB}{BA}+\frac{MC}{CD}=\frac{n}{m-n}+\frac{n}{m-n}=\frac{2n}{m-n}.$$

Kadangi N yra atkarpos MQ vidurio taškas, tai $\frac{MN}{NQ}=1$; todėl $\frac{2n}{m-n}=1$.

Iš čia $\frac{m}{n}=3$.

Pastebėkime, kad pagal Čevos teoremą $\frac{AQ}{QD}\cdot\frac{DC}{CM}\cdot\frac{MB}{BA}=1$. Į šią lygybę įrašę $\frac{CD}{CM}=\frac{m-n}{n}$, $\frac{MB}{BA}=\frac{n}{m-n}$, gauname $\frac{AQ}{QD}=1$. Taigi taškas Q yra pagrindo AD vidurio taškas. Iš trikampių panašumo lengvai gauname, kad taškas R yra pagrindo BC vidurio taškas. Taigi trapecijos pagrindų vidurio taškai, jos įstrižainių susikirtimo taškas ir šoninių kraštinių susikirtimo taškas yra vienoje tiesėje.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC yra taškai M ir N; be to, $AM:MB=2:1$, $AN:NC=4:5$. Per tiesių CM ir BN susikirtimo tašką P ir viršūnę A nubrėžta tiesė, kertanti kraštinę BC taške R. Raskite santykį $BR:RC$.

2. Įbrėžtas į trikampį ABC apskritimas liečia kraštines AB, BC ir CA atitinkamai taškuose C_1, A_1, B_1. Įrodykite, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške (Žergono taškas; Jozefas Žergonas (Joseph Diaz Gergonne, 1771–1859, prancūzų matematikas).

3. Apskritimas kerta trikampio ABC kraštinę BC taškuose A_1 ir A_2, kraštinę AC – taškuose B_1 ir B_2, o kraštinę BA – taškuose C_1 ir C_2. Jei tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške, tai ir tiesės AA_2, BB_2 ir CC_2 susikerta viename taške. Įrodykite.

4. Trikampio ABC pusiaukraštinėje AD yra toks taškas K, kad $AK:KD=3:1$. Kokiu santykiu tiesė BK dalija trikampio plotą?

5. Trikampio ABC kraštinėje AB yra toks taškas D, kad $AD:DB=3:2$, o kraštinėje BC yra tokie taškai E ir F, kad, $BE:EC=1:3$ ir $BF:FC=4:1$. Kokiu santykiu tiesė AE dalija atkarpą DF?

6. Trikampio ABC pusiaukampinė AD dalija kraštinę BC santykiu $BD:DC=2:1$. Kokiu santykiu pusiaukraštinė CE dalija pusiaukampinę AD?

7. Tiesė l kerta trikampio ABC kraštines AB ir BC taškuose D ir E, o kraštinės AC tęsinį – taške F. Įrodykite, kad atkarpų AE, BF ir CD vidurio taškai yra vienoje tiesėje (ta tiesė vadinama Gauso tiese; Karlas Fridrichas Gausas (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855, vokiečių matematikas).

8. Keturkampio $ABCD$ kraštinių BC ir AD tęsiniai susikerta taške P, kraštinių AB ir CD tęsiniai susikerta taške R, o įstrižainės AC ir BD – taške Q. Tiesių BC ir QR susikirtimo taškas, tiesių CA ir PR susikirtimo taškas, tiesių AB ir PQ susikirtimo taškas yra vienoje tiesėje. Įrodykite.

9. Trikampio ABC kraštinių ilgiai yra $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Kokiu santykiu pusiaukampinių susikirtimo taškas M dalija pusiaukampinę AD?

10. Trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas M aukštinę AH dalija pusiau. Įrodykite, kad $\cos\angle A=\cos\angle B\cdot\cos\angle C$.



VII. BERNULIO FORMULĖ IR JOS TAIKYMAS

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Šioje temoje kalbama apie vieną tikimybių teorijos formulę, įrodytą šveicarų matematiko Bernulio (Jacob Bernoulli, 1654–1705), naudingą skaičiuojant tikimybes, susijusias su daugkartiniais bandymais. Nesunku apskaičiuoti tikimybę, kad moneta atsivers herbu, ją metus vieną kartą (ši tikimybė lygi 0,5). Tačiau daug sudėtingiau rasti tikimybę atsiversti monetai herbu 7 kartus, kai ji mesta, pavyzdžiui, 20 kartų. Naudodamiesi Bernulio formule, galėsime tai padaryti. Taip pat išmoksime rasti ir sudėtingesnių įvykių tikimybes.

Priminsime pagrindines tikimybių teorijos sąvokas ir kai kurias tikimybių skaičiavimo formules, reikalingas tolesniam temos plėtojimui.

Bandymas. Įvykis. *Bandymu*, arba *eksperimentu*, vadinama sąlygų, sudarančių galimybę įvykti stebimajam įvykiui, visuma. Stebimasis įvykis gali ir neįvykti – apie tokius įvykius sakoma, kad jie yra *atsitiktiniai*. Žinoma, kad ne visi įvykiai – atsitiktiniai. Pavyzdžiui, įvykis, kad po nakties išauš diena, būtinai įvyks (*būtinasis įvykis*), o įvykis, kad rytoj saulė pakils iš vakarų, tikrai neįvyks (*negalimasis įvykis*). Tikimybių teorija tiria atsitiktinių įvykių dėsningumus. Remiantis šia teorija negalima nustatyti, ar įvyks mus dominantis įvykis konkrečiu atveju, tačiau galima įvertinti šio įvykio įvykimo galimybę, t. y. apskaičiuoti jo tikimybę.

Kad galėtume tirti atsitiktinius įvykius, reikia sukurti tam tikrą matematinį modelį. Pirmiausia įvykius reikia užrašyti matematine kalba, o po to įvesti ir tam tikrą matą, kuriuo būtų galima matuoti įvykio įvykimo galimybę.

Atliekant bandymą neaišku, ar įvyks laukiamas atsitiktinis įvykis, tačiau dažnai galima nustatyti *bandymo baigčių aibę*. Klasikinis pavyzdys – lošimo kauliuko metimas. Čia galimos šešios baigtys: e_i, $i = 1, 2, ..., 6$ (gali atsiversti bet kuri iš šešių lošimo kauliuko sienelių). Taigi su šiuo bandymu susiejame baigčių aibę $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}$. Atkreipkime dėmesį, kad šios baigtys yra *vienodai galimos*. Su šiuo bandymu susijusius įvykius galima apibūdinti aibės Ω poaibiais. Pavyzdžiui, įvykį A, kad lošimo kauliukas atsivers lyginiu akučių

skaičiumi, galima užrašyti poaibiu $A=\{e_2;e_4;e_6\}$, įvykis, kad atsivertė nelyginis akučių skaičius yra poaibis $B=\{e_1;e_3;e_5\}$, o įvykis C, kad atsivers šešios akutės yra sudarytas tik iš vienos baigties, todėl $C=\{e_6\}$.

Baigtys, priklausančios aibėms A, B, C vadinamos atitinkamai įvykiams A, B, C *palankiomis baigtimis*. Įvykiai, kuriems palanki tik viena baigtis, vadinami *elementariaisiais įvykiais*. Pavyzdžiui, C yra elementarusis įvykis. Elementarieji įvykiai paprastai žymimi E_i, $i=1,2,...,n$; čia n baigčių skaičius aibėje Ω.

Įvykis Ω yra būtinasis, o tuščios aibės simboliu $\varnothing$ žymimas *negalimasis* įvykis.

Įvykių sąjunga, sankirta ir skirtumas. Kadangi įvykiai tapatinami su baigčių aibėmis, tai su jais, kaip ir su bet kokiomis aibėmis, galima atlikti veiksmus. Priminsime tik sąjungos, sankirtos ir skirtumo sąvokas.

Dviejų įvykių, A ir B, *sąjunga* (žymima $A\cup B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios bent vienam iš įvykių A ir B.

Dviejų įvykių, A ir B, *sankirta* (žymima $A\cap B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios abiem įvykiams.

Įvykių A ir B skirtumas (žymima $A\setminus B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios įvykiui A, bet nepalankios įvykiui B.

Du įvykiai, A ir B, vadinami *nesutaikomaisiais*, jei $A\cap B=\varnothing$ (abu įvykiai negali įvykti kartu).

Įvykis $\overline{A}=\Omega-A$ vadinamas priešinguoju įvykiui A.

Įvykio tikimybė. Įvykio tikimybę apibrėšime paprasčiausiu – klasikiniu – atveju, kai bandymo baigtys yra vienodai galimos, – to mums visiškai užteks tolesniam dėstymui. Apskritai tikimybių teorijoje tikimybė apibrėžiama nereikalaujant bandymo baigčių vienodo galimumo.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas. Tarkime, bandymo baigčių aibė Ω yra sudaryta iš n vienodai galimų baigčių e_i, $i=1,2,...,n$. Įvykio $A=\{e_1;e_2;\dots e_m\}$ (sudaryto iš m šiam įvykiui palankių baigčių) *tikimybe* vadinamas skaičius $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Skaičiuojant tikimybę pagal klasikinį apibrėžimą ypač svarbu įsitikinti baigčių vienodu galimumu.

Taikant klasikinį apibrėžimą gaunama tokia nesutaikomų įvykių A ir B sąjungos tikimybės formulė:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Įvykių nepriklausomumas ir priklausomumas. Šios tikimybinės sąvokos visiškai atitinka gyvenimišką nepriklausomumo ir priklausomumo sampratą. Jei vieno įvykio įvykimas nedaro įtakos kito įvykimui, o tiksliau – vieno iš jų tikimybė nepriklauso nuo to, ar įvyko, ar ne kitas įvykis, tai jie vadinami *nepriklausomais*. Jeigu taip nėra, tai jie yra *priklausomi*. Tačiau kaip nustatyti, ar du konkretūs įvykiai yra priklausomi, ar nepriklausomi? Čia turime prisiminti sąlyginės tikimybės sąvoką.

Įvykio A *sąlyginė tikimybė* su sąlyga, kad įvykis B įvykęs (ji žymima $P(A \mid B)$), yra skaičius

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ kai } P(B) \neq 0. \qquad (2)$$

Pastarąja formule sąlyginė tikimybė išreikšta „besąlyginėmis“ tikimybėmis. Tai visai natūralu, nes šiuo atveju skaičiuojant įvykio A tikimybę, baigčių aibę sudaro tik įvykiui B palankios baigtys, o įvykiui A iš jų palankios tik tos, kurios priklauso šių įvykių sankirtai.

Jeigu $P(A \mid B) = P(A)$, tai įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Tuomet iš (2) formulės išplaukia, kad

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3)$$

Įvykiai A ir B, kuriems galioja ši lygybė, vadinami *nepriklausomais įvykiais*.

Galima įrodyti tokį teiginį: jei viena iš įvykių porų A ir B, A ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir B, $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ yra nepriklausomi, tai ir kitų porų įvykiai yra nepriklausomi.

Nepriklausomų bandymų kartojimas. Metus simetrinį lošimo kauliuką vieną kartą, tikimybė, kad jis atsivers šešiomis akutėmis, lygi $\frac{1}{6}$, o kad neatsivers šešios akutės – $\frac{5}{6}$.

Jeigu metami du kauliukai, tai pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą galima rasti tikimybes $p_2(0)$ (įvykio, kad šešios akutės neatsivers nė karto), $p_2(1)$ (įvykio, kad šešios akutės atsivers vieną kartą) ir $p_2(2)$ (įvykio, kad šešios akutės atsivers du kartus). Tuomet tektų suskaičiuoti, kiek iš 36 vienodai galimų baigčių yra palankių minėtiems įvykiams.

Šios tikimybės yra: $p_2(0)=\frac{25}{36}$, $p_2(1)=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{36}$, $p_2(2)=\frac{1}{36}$.

Lošimo kauliuko metimo du bandymus visai pagrįstai galima vadinti nepriklausomais bandymais, nes kad ir koks būtų pirmojo metimo rezultatas, nuo jo nepriklauso antrojo metimo rezultatų tikimybės. Apskritai, bandymai vadinami nepriklausomais, jeigu kiekvieno iš jų rezultato tikimybė nepriklauso nuo kitų bandymų rezultatų.

Minėtąsias lošimo kauliuko dviejų metimų tikimybes $p_2(0)$, $p_2(1)$ ir $p_2(2)$ apskaičiuokime kitaip – remdamiesi bandymų nepriklausomumu. Tegu A – įvykis, kad viename bandyme atsivers šešios akutės. Jo tikimybė $p=P(A)=\frac{1}{6}$, o *priešingojo įvykio* tikimybė yra $q=P(\overline{A})=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Pažymėkime dviejų metimų bandymo galimus įvykius: AA – įvykis A įvyksta abiejuose bandymuose, $A\overline{A}$ – pirmame įvyksta, antrame – ne, $\overline{A}A$ – pirmame neįvyksta, antrame – įvyksta, $\overline{A}\overline{A}$ – abiejuose neįvyksta. Kadangi bandymai yra nepriklausomi, tai skaičiuodami tikimybes, gausime:

$$P(AA)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36},\quad P(A\overline{A})=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36},$$

$$P(\overline{A}A)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36},\quad P(\overline{A}\overline{A})=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}.$$

Tada

$$p_2(0)=P(\overline{A}\overline{A})=\frac{25}{36},$$

$$p_2(1)=P(A\overline{A}\cup\overline{A}A)=P(A\overline{A})+P(\overline{A}A)=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{36},$$

$$p_2(2)=P(AA)=\frac{1}{36}.$$

Šis tikimybių skaičiavimo būdas, nors ir atrodo sudėtingas, yra žymiai universalesnis, nes gali būti naudojamas ir bet kurio skaičiaus n ($n\in\mathrm{N}$) nepriklausomų bandymų atveju.

Nagrinėkime bandymą, sudarytą iš trijų nepriklausomų bandymų

($n=3$), kurių kiekviename įvykio A tikimybė lygi p ($P(A)=p$), o priešingojo įvykio – $q=P(\overline{A})=1-p$.

Tuomet apskaičiavę tikimybes, kad įvykis A įvyks 0, 1, 2 ir 3 kartus, gausime: $p_3(0)=q^3$, $p_3(1)=3\cdot p\cdot q^2$, $p_3(2)=3\cdot p^2\cdot q$, $p_3(3)=p^3$. Atkreipkime dėmesį, kad visų šių tikimybių suma lygi 1:

$$p_3(0)+p_3(1)+p_3(2)+p_3(3)=q^3+3p^2q+3pq^2+p^3=(q+p)^3=1,$$

nes $p+q=1$.

Prisiminkime formulę derinių skaičiui C_n^m iš n elementų po m elementų rasti:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (4)$$

($0!=1$).

Nesunku matyti, kad tikimybių $p_2(k), k=0,1,2,$ ir $p_3(k)$, $k=0,1,2,3$ išraiškose esančius koeficientus galima užrašyti taip:

$$p_2(k)=C_2^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,2, \text{ ir } p_3(k)=C_3^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,2,3.$$

Bernulio formulė. Atliekant n nepriklausomų bandymų, kurių kiekviename $P(A)=p$ ir $P(\overline{A})=1-p=q$, tikimybė $p_n(k)$, kad įvykis A įvyks k kartų, lygi

$$p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n. \qquad (5)$$

Ši formulė vadinama Bernulio formule.

Bernulio formulės įrodymą galima rasti vadovėlyje *Matematika*, 12, I dalis: Išplėstinis kursas, Vilnius: TEV, 2003, p. 162–165.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime tikimybę, kad 5 kartus metus taisyklingą lošimo kauliuką: a) 2 kartus atsivers šešios akutės; b) 3 kartus atsivers ne mažiau kaip 5 akutės; c) 4 kartus atsivers lyginis akučių skaičius.

Sprendimas. a) Įvykio A, kad viename bandyme atsivers šešios akutės, tikimybė lygi $\frac{1}{6}$. Į Bernulio formulę įrašome $n=5$, $k=2$, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$ ir gauname

$$p_5(2)=C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{5^3}{6^5}=\frac{625}{3888}\approx 0{,}161.$$

b) Įvykio A, kad viename bandyme atsivers ne mažiau kaip 5 akutės, tikimybė lygi $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Pagal Bernulio formulę (įrašę $n=5$, $k=3$, $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$) gauname

$$p_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2^2}{3^5}=\frac{40}{243}\approx 0{,}165.$$

c) Įvykio A, kad viename bandyme atsivers lyginis akučių skaičius, tikimybė lygi $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Todėl pagal Bernulio formulę gauname

$$p_5(4)=C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}\approx 0{,}156.$$

2 pavyzdys. Tikimybė atsitiktinai pasirinkti kokybišką prekę lygi 0,9. Apskaičiuokime tikimybę, kad tarp 10 taip pasirinktų prekių bus ne daugiau kaip viena nekokybiška (įvykis B).

Sprendimas. Tegu A – įvykis, kad atsitiktinai paimta prekė yra nekokybiška. Tuomet $p=P(A)=0{,}1$, $q=0{,}9$, $n=10$; todėl

$$P(B)=p_{10}(0)+p_{10}(1)=0{,}9^{10}+C_{10}^1 0{,}1\cdot 0{,}9^9\approx 0{,}3487+0{,}3874\approx 0{,}7361.$$

Ats.: 0,7361.

Tikimybė įvykiui įvykti bent kartą Nesunku apskaičiuoti tikimybę, kad įvykis A įvyks bent vieną kartą atlikus n nepriklausomų bandymų. Jei $P(A)=p$, tai ši tikimybė (pažymėkime ją $R_n(1)$) lygi $1-q^n$, $q=1-p$. Taigi

$$R_n(1)=1-q^n. \qquad (7)$$

Dabar galime atsakyti ir į klausimą – kiek mažiausiai bandymų reikia atlikti, kad esant tikimybei ne mažesnei kaip P, galėtume teigti, kad įvykis A įvyks bent vieną kartą? Tuo tikslu turime išspręsti nelygybę $1-q^n\geq P$ nežinomojo n atžvilgiu:

$$1-q^n \geq P \Rightarrow q^n \leq 1-P \Rightarrow n\ln q \leq \ln(1-P) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln q}.$$

Taigi mažiausias bandymų skaičius yra

$$N = \left[\frac{\ln(1-P)}{\ln q}\right] + 1. \qquad (8)$$

Pastaba. Jeigu skaičius $\frac{\ln(1-P)}{\ln q}$ yra sveikasis, tai mažiausias bandymų skaičius, kad galiotų nelygybė $R_n(1) \geq P$, yra $N = \frac{\ln(1-P)}{\ln q}$.

3 pavyzdys. Apskaičiuokime, kiek mažiausiai kartų turime mesti taisyklingą lošimo kauliuką, kad šešios akutės atsiverstų bent vieną kartą esant tikimybei 0,95.

Sprendimas. Pagal sąlygą $q = \frac{5}{6}$, $P = 0{,}95$. Tuomet

$$\frac{\ln(1-P)}{\ln q} = \frac{\ln 0{,}05}{\ln 5 - \ln 6} = \frac{-2{,}996}{1{,}609 - 1{,}792} = \frac{2{,}996}{0{,}183} = 16{,}372.$$

Gauname $N = [16{,}372] + 1 = 16 + 1 = 17$.

Ats.: 17.

Tikimybė įvykiui pirmą kartą įvykti *k*-ajame bandyme. Tarkime, atliekami nepriklausomi bandymai, kurių įvykio A įvykimo viename bandyme tikimybė yra $P(A) = p$ ir $P(\overline{A}) = q = 1-p$. Tegu k yra bandymo, kuriame įvykis A įvyksta pirmą kartą, numeris. Aišku, galimos k reikšmės yra 1, 2, 3, ... Tuomet tikimybė, kad A pirmą kartą įvyks k-ajame bandyme, lygi:

$$P(k) = q^{k-1}p. \qquad (9)$$

Ši formulė išplaukia iš to, kad kiekvieno iš pirmųjų $(k-1)$ bandymų rezultatas turi būti įvykis $\overline{A}$, o k-ajame bandyme įvykis A turi įvykti. Kadangi bandymai yra nepriklausomi, tai šio įvykio tikimybė išreiškiama atitinkamų tikimybių sandauga, t. y. (9) formule.

4 pavyzdys. Apskaičiuokime tikimybę, kad mėtant taisyklingą lošimo kauliuką, jis šešiomis akutėmis pirmą kartą atsivers metant penktą kartą.

Sprendimas. $P(5) = q^4 p = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}08.$

Tikėtiniausias įvykių skaičius.

5 pavyzdys. Tarkime, tikimybė, kad batų parduotuvėje pirkėjas nupirks 42 dydžio batus, lygi 0,25. Iš pirmųjų 8 pirkėjų nė vienas gali nenupirkti tokio dydžio batų, gali nupirkti vienas pirkėjas, gali nupirkti du pirkėjai, ir t. t., visi aštuoni pirkėjai. Pagal Bernulio formulę apskaičiuokime visų šių įvykių tikimybes. Gausime:

$$p_8(0) \approx 0{,}1001, \quad p_8(1) \approx 0{,}2670, \quad p_8(2) \approx 0{,}3115,$$

$$p_8(3) \approx 0{,}2076, \quad p_8(4) \approx 0{,}0865, \quad p_8(5) \approx 0{,}0231,$$

$$p_8(6) \approx 0{,}0038, \quad p_8(7) \approx 0{,}0004, \quad p_8(8) \approx 0{,}000015$$

(patikrinkite!). Matome, kad kintant k reikšmei nuo 0 iki 8, tikimybė iš pradžių didėja, ji įgyja didžiausią reikšmę, kai $k = 2$, o po to – mažėja (žr. 1 pav. – šis grafikas vadinamas *tikimybių daugiakampiu*). Taigi labiausiai tikėtina, kad 42 dydžio batus nusipirks du pirkėjai.

6 pavyzdys. Apskaičiuokime tikimybes $p_n(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 9$, $n = 9$, $P(A) = 0{,}5$ ir raskime tikėtiniausią įvykio A įvykimo skaičių.

Kadangi $P(A) = 0{,}5$, tai šį uždavinį galėtume suformuluoti ir taip: kiek kartų labiausiai tikėtinas monetos atsivertimas herbu po 9 metimų?

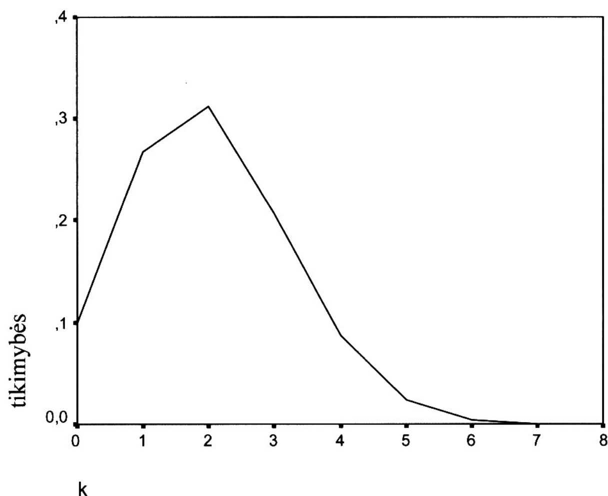
Pagal Bernulio formulę apskaičiuotas tikimybes (jas suapvalinę iki trijų ženklų po kablelio) surašykime į lentelę:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_9(k)$	0,002	0,018	0,071	0,164	0,245	0,245	0,164	0,071	0,018	0,002

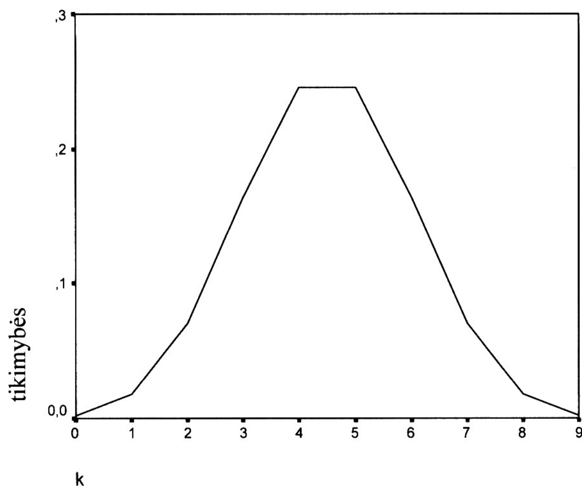
Šias tikimybes taip pat pavaizduokime grafiškai (žr. 2 pav.). Atkreipiame dėmesį, kad tikimybių daugiakampis yra laužtė, simetrinė tiesės $x = 4{,}5$ atžvilgiu, o didžiausios tikimybės reikšmės yra dvi: 4 ir 5.

Kyla klausimas, ar tikėtiniausiam įvykio įvykimo skaičiui k_0 po n nepriklausomų bandymų rasti būtina apskaičiuoti visas tikimybes $p_n(k)$, kai $k = 0, 1, \ldots, n$? Į šį klausimą galima atsakyti analizuojant tikimybių santykius $\frac{p_n(k)}{p_n(k-1)}$. Jei šis santykis lygus 1, tai „kaimyninės“ tikimybės yra lygios, kai santykis didesnis už 1 ar mažesnis už 1 –

paskesnioji tikimybė yra atitinkamai didesnė arba mažesnė už „kaimynę“ iš kairės. Išsamių skaičiavimų čia nepateiksime – suformuluosime tik rezultatą.



1 pav.



2 pav.

Jeigu skaičius $k=(n+1)p$ *nėra sveikasis, tuomet egzistuoja vienintelė tikėtiniausia reikšmė, apskaičiuojama pagal formulę*

$k_0 = [(n+1)p]$; *čia simbolis* $[x]$ *žymi skaičiaus* x *sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, neviršijantį* x.

Jeigu skaičius $k=(n+1)p$ *yra sveikasis, tuomet egzistuoja dvi tikėtiniausios reikšmės* $k_0=(n+1)p$ *ir* k_0-1.

Mūsų nagrinėtame 3 pavyzdyje $k_0 = [(8+1)\cdot 0{,}25] = [2{,}25] = 2$, o 4 pavyzdyje $k_0 = (9+1)\cdot 0{,}5 = 5$; taigi 5 ir 4 yra tikėtiniausios reikšmės.

7 pavyzdys. Raskime, koks tikėtiniausias taisyklingo lošimo kauliuko šešių akučių atsivertimo skaičius, jeigu jį mesime: a) 100 kartų; b) 119 kartų.

Sprendimas. Apskaičiuojame:

a) $(n+1)p = 101\cdot\frac{1}{6} \approx 16{,}83$;

b) $(n+1)p = 120\cdot\frac{1}{6} = 20$.

Vadinasi, atveju a) šešių akučių tikėtiniausias atsivertimo skaičius lygus $[16{,}83]=16$, o atveju b) yra dvi tikėtiniausios reikšmės: 19 ir 20.

Ats.: a) 16; b) 19, 20.

Muavro ir Laplaso lokalioji teorema. Iš pateiktų pavyzdžių matome, kad tikimybės $p_n(k)$ nesunkiai apskaičiuojamos pagal Bernulio formulę, kai n ir k yra nedideli skaičiai. Tačiau jei bandymų skaičius, pavyzdžiui, yra 300, $p=0{,}4$, tai apskaičiuoti tikimybę $p_{300}(100) = C_{300}^{100}\cdot 0{,}4^{100}\cdot 0{,}6^{200}$ nėra lengva. Tokioms tikimybėms rasti taikoma lokalioji Muavro ir Laplaso (Pierre-Simon Laplace, 1749–1827, prancūzų matematikas) teorema.

Tarkime, n kartų atliekami nepriklausomi bandymai, kurių įvykio A įvykimo viename bandyme tikimybė yra $p(A)=p$ ir $P(\overline{A})=q=1-p$.

Tuomet

$$p_n(k) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (10)$$

kai bandymų skaičius yra pakankamai didelis. Čia $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Pastaba. Funkcijos $f(x)$ reikšmes galima apskaičiuoti su skaičiuotuvu, tačiau dažnai naudojamos ir šios funkcijos reikšmių lentelės, kurios pateikiamos platesniuose vadovėliuose, pavyzdžiui, žr. knygos A. Apynis, E. Stankus, *Matematika*, Vilnius: TEV, 2001, p. 351.

8 pavyzdys. Berniuko gimimo tikimybė lygi 0,515. Apskaičiuokime tikimybę, kad iš 200 naujagimių gims lygiai 95 mergaitės.

Sprendimas. Pažymėkime A įvykį, kad gims mergaitė. Tuomet $p = P(A) = 1 - 0{,}515 = 0{,}485,\ q = 0{,}515,\ n = 200,\ k = 95,$

$$x = \frac{95 - 200 \cdot 0{,}485}{\sqrt{200 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}515}} = \frac{-2}{7{,}0679} \approx -0{,}283.$$

Kadangi $e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0{,}9607$, kai $x = -0{,}283$ ir

$$f(-0{,}283) \approx \frac{1}{\sqrt{6{,}2832}} \cdot 0{,}9607 \approx 0{,}3833, \quad \sqrt{200 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}515} \approx 7{,}0679,$$

tai pagal (10) formulę

$$p_{200}(95) \approx \frac{f(-0{,}283)}{\sqrt{200 \cdot 0{,}485 \cdot 0{,}515}} \approx \frac{0{,}3833}{7{,}0679} \approx 0{,}0542.$$

Ats.: 0,0542.

Bernulio formulė taikoma tiek pačioje tikimybių teorijoje, tiek tiriant įvairius masinius reiškinius.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Du šachmatininkai Antanas ir Juozas yra vienodo pajėgumo – kiekvieno tikimybė laimėti šachmatų partiją prieš kitą yra 0,5 (lygiosios negalimos). Kuri tikimybė yra didesnė: ar Antanui laimėti prieš Juozą tris partijas iš keturių, ar Juozui laimėti prieš Antaną penkias partijas iš aštuonių?

2. Kuri tikimybė mažesnė: ar kad iš 4 monetos metimų herbas atsivers ne mažiau kaip 3 kartus, ar kad iš 8 metimų herbas atsivers ne mažiau kaip 5 kartus?

3. Tikimybė, kad televizoriui per garantinį laikotarpį prireiks remonto, lygi 0,2. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš 6 tokių televizorių per garantinį laikotarpį remonto prireiks: a) ne daugiau kaip vienam televizoriui; b) bent vienam televizoriui.

4. Krepšininko baudos metimo pataikymo tikimybė lygi 0,8. Apskaičiuokite, kiek mažiausiai kartų krepšininkas turi mesti į krepšį, kad tikimybė pataikyti bent vieną metimą būtų lygi 0,97.

5. Kokia tikimybė, kad mėtant monetą herbas pirmą kartą atsivers šeštuoju metimu?

6. Tikimybė, kad keleivis pavėluos į traukinį, lygi 0,02. Koks tikėtiniausias pavėlavusių į traukinį keleivių skaičius iš 855 keleivių?

7. Iš sandėlio kasdien tiekiamos prekės dvylikai parduotuvių pagal jų paraiškas. Tikimybė, kad iš kiekvienos parduotuvės bus gauta paraiška atvežti prekių, lygi 0,3. Koks tikėtiniausias paraiškų skaičius rytoj? Apskaičiuokite tikimybę gauti tikėtiniausią skaičių paraiškų.

8. Tikimybė, kad kavos automatas tvarkingai atliks savo užduotį („duos“ kavos), lygi 0,97. Kiek kartų reikia pasinaudoti kavos aparatu, kad tikėtiniausias automato tvarkingai atliktų užduočių skaičius būtų 100?

9. Tikimybė, kad mokinys sėkmingai išlaikys egzaminą, lygi 0,7. Kokia tikimybė, kad iš 300 mokinių lygiai 149 sėkmingai išlaikys egzaminą?

10. Tikimybė, kad apdraustas automobilis patirs avariją, lygi 0,1. Apskaičiuokite tikimybę, kad lygiai pusė iš 220 apdraustų automobilių patirs avariją.



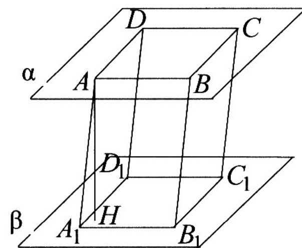
VIII. BRIAUNAINIAI

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Briaunainiu vadinama geometrinė figūra, sudaryta iš baigtinio skaičiaus plokščiųjų daugiakampių, vadinamų briaunainio *sienomis*. Kiekvienos sienos kiekviena kraštinė yra dar vienos ir tik vienos sienos kraštinė; tokios dvi sienos vadinamos *gretimomis*. Bet kurios dvi gretimos sienos nėra vienoje plokštumoje. Jei α ir β nėra gretimos briaunainio sienos, tai egzistuoja tokios sienos α_1, α_2, ..., α_n, kad α ir α_1 yra gretimos sienos, α_1 ir α_2 yra gretimos sienos, ir t. t. α_n ir β yra gretimos sienos. Jei sienos α ir β turi bendrą viršūnę A, tai minėtas sienas α_1, α_2,..., α_n galima parinkti taip, kad visos jos turėtų bendrą viršūnę A. Briaunainio sienų kraštinės yra vadinamos briaunainio *briaunomis*, o jo sienų viršūnės briaunainio *viršūnėmis*. Kiekviena briaunainio briauna yra dviejų jo sienų kraštinė, kiekviena briaunainio viršūnė yra bent trijų briaunainio sienų viršūnė. Atkarpa, jungianti dvi briaunainio viršūnes, nepriklausančias tai pačiai sienai, vadinama briaunainio *įstrižaine*. Dvisieniai kampai, kuriuos sudaro dvi gretimos briaunainio sienos, yra vadinami *briaunainio plokščiaisiais kampais*. Nagrinėsime tik *iškiluosius briaunainius*, t. y. tokius briaunainius, kurie yra kiekvienos briaunainio sienos plokštumos vienoje pusėje.

Visų briaunainio sienų plotų suma yra vadinama briaunainio *paviršiaus plotu*. Kiekvienas briaunainis turi *tūrį*, išreiškiamą tūrio matavimo vienetu. Tūrio matavimo vienetas – tai kubo, kurio kraštinė lygi ilgio matavimo vienetui, tūris.

2. Sakykime, kad lygiagrečiose plokštumose α ir β, yra du lygūs lygiagretainiai $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$, kurių kraštinės AB ir A_1B_1 yra lygiagrečios ir vienakryptės, kraštinės BC ir B_1C_1 taip pat lygiagrečios ir vienakryptės (1 pav.). Tuomet tiesės AA_1 ir BB_1 yra lygiagrečios, nes keturkampio



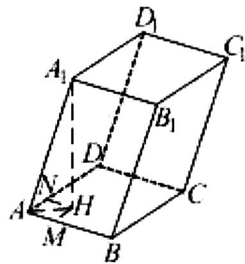
1 pav.

ABB_1A_1 kraštinės AB ir A_1B_1 lygios ir lygiagrečios. Analogiškai $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$. Taigi turime briaunainį $ABCDA_1B_1C_1D_1$, sudarytą iš šešių lygiagretainių. Po du iš jų yra lygiagrečiose plokštumose ir lygūs ($ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 ir DCC_1D_1, ADD_1A_1 ir BCC_1B_1). Toks briaunainis vadinamas *gretasieniu*. Gretasienis turi 6 sienas, 8 viršūnes, 12 briaunų ir 4 įstrižaines. Lygios ir lygiagrečios gretasienio sienos yra vadinamos *priešingosiomis sienomis*. Dažnai dvi priešingosios sienos yra vadinamos *gretasienio pagrindais*. Tuomet kitos 4 sienos vadinamos gretasienio *šoninėmis sienomis*; jų plotų suma vadinama gretasienio *šoninio paviršiaus plotu*. Statmuo, nuleistas iš gretasienio viršūnės į vieną per tą viršūnę neinančią gretasienio sieną, vadinamas *gretasienio aukštine*; atkarpa AH (1 pav.) yra gretasienio aukštinė. Gretasienis turi tris aukštines. Jei tiesė AA_1 yra statmena plokštumai, einančiai per taškus A_1, B_1, C_1, D_1, tai gretasienis vadinamas *stačiuoju*. Stačiojo gretasienio sienos ABB_1A_1, ADD_1A_1, BCC_1B_1 ir CDD_1C_1 yra stačiakampiai, jo aukštinė lygi briaunoms AA_1, BB_1, CC_1 ir DD_1. Jei stačiojo gretasienio sienos $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ irgi yra stačiakampiai, tai toks gretasienis yra vadinamas *stačiakampiu gretasieniu*.

Gretasienio tūris yra lygus sienos ploto ir į tą sieną nubrėžtos aukštinės sandaugai.

1 pavyzdys. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ siena $ABCD$ yra rombas, kurio kraštinės ilgis lygus a, o smailusis kampas 60°. Briauna AA_1, su briaunomis AB ir AD sudaro 45° kampus, o jos ilgis lygus a. Rasime gretasienio tūrį.

Sprendimas. Rombo, kurio kraštinės ilgis lygus a, o kampas 60°, plotas yra $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



2 pav.

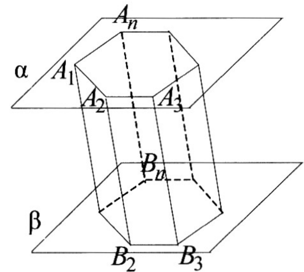
Rasime gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ aukštinės A_1H, nuleistos iš viršūnės A_1 į pagrindą $ABCD$, ilgį (2 pav.). Nubrėžkime statmenis HM ir HN į briaunas AB ir AD. Pagal trijų statmenų teoremą $A_1M \perp AB$ ir $A_1N \perp AD$. Statieji trikampiai AA_1M ir AA_1N yra lygūs, nes jų

įžambinė AA_1 bendra ir $\angle A_1AM = \angle A_1AN = 45^\circ$. Taigi $A_1M = A_1N$. Todėl statieji trikampiai A_1HM ir A_1HN taip pat lygūs (nes jų statinis A_1H bendras ir įžambinės A_1M ir A_1N lygios). Vadinasi, $HM = HN$ ir $\angle HAM = 30^\circ$. Iš trikampių AA_1M ir AA_1N randame $AM = AN = AA_1\cos 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Iš trikampio HAM randame $AH = \dfrac{AM}{\cos 30^\circ} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a$. Tuomet iš stačiojo trikampio AA_1H turime

$$A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Taigi gretasienio tūris yra

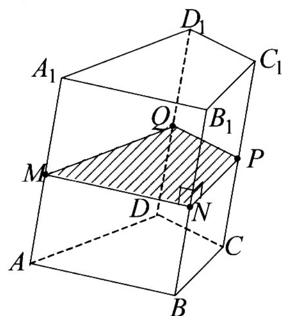
$$V = S \cdot A_1H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2}.$$



3 pav.

3. Sakykime, kad lygiagrečiose plokštumose α ir β yra du lygūs n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ (3 pav.); be to, tiesės A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n yra lygiagrečios. Tuomet keturkampiai $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ yra lygiagretainiai ($A_1A_2 \| B_1B_2$, $A_2A_3 \| B_2B_3$, ..., $A_nA_1 \| B_nB_1$). Briaunainis, kurį sudaro du lygūs n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ ir n lygiagretainių $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$, yra vadinamas *n-kampe prizme*. Lygūs n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ yra vadinami *prizmės pagrindais*, o minėtieji lygiagretainiai – *prizmės šoninėmis sienomis*. Atkarpos A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n yra vadinamos prizmės *šoninėmis briaunomis;* jos yra lygios ir lygiagrečios. Statmuo, nuleistas iš bet kurio vieno pagrindo taško į kito pagrindo plokštumą, vadinamas *prizmės aukštine.* Jei prizmės pagrindai yra lygiagretainiai, turime gretasienį. Jei prizmės šoninės briaunos statmenos pagrindų plokštumoms, tai prizmė vadinama *stačiąja*; priešingu atveju prizmė yra pasviroji. Stačiosios prizmės aukštinė lygi šoninei briaunai. Stačioji

prizmė vadinama *taisyklingąja*, jei jos pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai. Prizmės *statmenuoju pjūviu* vadinama jos pagrindo ortogonalioji projekcija bet kurioje plokštumoje, statmenoje prizmės šoninėms briaunoms. Visi prizmės statmenieji pjūviai yra lygūs. Stačiosios prizmės statmenieji pjūviai yra lygūs jos pagrindams. Prizmės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (4 pav.) statmenasis pjūvis yra keturkampis $MNPQ$ (plokštuma, einanti per taškus M, N, P ir Q yra statmena prizmės briaunoms).



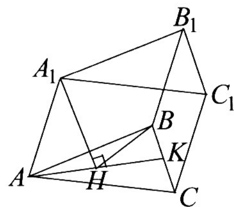
4 pav.

Prizmės šoninio paviršiaus plotas yra jos šoninių sienų plotų suma. Jis lygus prizmės pagrindo perimetro ir prizmės šoninės sienos aukštinės sandaugai. Kadangi prizmės šoninės sienos yra lygiagretainiai, kurių viena kraštinė lygi prizmės šoninei briaunai, o į ją nubrėžtos aukštinės yra prizmės statmenojo pjūvio kraštinės, tai prizmės šoninio paviršiaus plotas lygus prizmės statmenojo pjūvio perimetro ir prizmės šoninės briaunos sandaugai.

Prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.

2 pavyzdys. Pasvirosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ visos briaunos lygios, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$, sienos CC_1B_1B plotas lygus Q. Rasime prizmės tūrį.

Sprendimas. Kadangi prizmės $ABCA_1B_1C_1$ visos briaunos lygios, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$, tai trikampiai A_1AB ir A_1AC yra lygiakraščiai (5 pav.). Jei A_1H – prizmės aukštinė, tai statieji trikampiai AA_1H, BA_1H ir CA_1H yra lygūs, nes jų statinis A_1H – bendras, o įžambinės AA_1, BA_1 ir CA_1 lygios. Iš trikampių lygybės išplaukia, kad $AH = BH$; taigi taškas H yra lygiakraščio trikampio ABC centras. Kadangi $AH \perp BC$, $A_1H \perp BC$, tai pagal trijų statmenų teoremą $AA_1 \perp BC$; todėl $CC_1 \perp BC$ ir $BB_1 \perp AC$. Kadangi prizmės visos briaunos lygios,

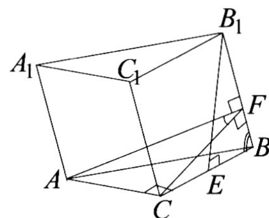


5 pav.

tai iš čia seka, kad keturkampis BCC_1B_1 yra kvadratas. Pagal sąlygą jo plotas lygus Q, todėl $BC=\sqrt{Q}$. Tuomet trikampio ABC plotas yra $S=\frac{1}{2}BC^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}Q}{4}$, o aukštinė $AK=\frac{2S}{BC}=\frac{\sqrt{3Q}}{2}$; todėl $AH=\frac{2}{3}AK=\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{3}}$. Iš stačiojo trikampio AA_1H randame prizmės aukštinę: $A_1H=\sqrt{AA_1^2-AH^2}=\sqrt{Q-\frac{Q}{3}}=\frac{\sqrt{2Q}}{\sqrt{3}}$. Taigi prizmės tūris yra $V=S\cdot A_1H=\frac{Q\sqrt{2Q}}{4}$.

3 pavyzdys. Pasvirosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas ABC yra statusis trikampis, kurio $\angle C=90^\circ$, $BC=a$. Viršūnės B_1 ortogonalioji projekcija pagrindo plokštumoje yra kraštinės BC vidurio taškas. Dvisienis kampas tarp sienų ABB_1A_1 ir CBB_1C_1 lygus φ, visos prizmės šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro kampus, lygius α. Rasime prizmės šoninio paviršiaus plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad prizmės $ABCA_1B_1C_1$ viršūnės B_1 ortogonalioji projekcija pagrindo ABC plokštumoje yra taškas E (6 pav.). Tuomet tiesė BC yra tiesės BB_1 ortogonalioji projekcija toje plokštumoje; taigi $\angle B_1BC=\alpha$. Kadangi tiesės AC ir BC statmenos, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesės AC ir BB_1 yra statmenos. Plokštuma, einanti per tiesę AC ir statmena tiesei BB_1 kerta tiesę BB_1 taške F. Todėl trikampis FAC yra prizmės statmenasis pjūvis; be to, $\angle AFC=\varphi$. Kadangi tiesė CB yra tiesės FC ortogonalioji projekcija, tai pagal trijų statmenų teoremą $FC\perp AC$. Taigi iš stačiojo trikampio AFC randame:



6 pav.

$AC=FC\text{tg}\varphi=a\sin\alpha\text{tg}\varphi$, $AF=\frac{FC}{\cos\varphi}=\frac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}$. Taigi statmenojo pjūvio AFC perimetras yra

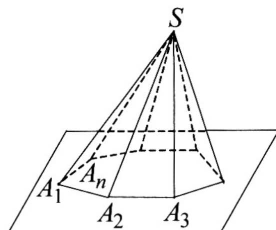
$$2p = AC + CF + AF = a\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi + a\sin\alpha + \frac{a\sin\alpha}{\cos\varphi} =$$

$$= \frac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi + 1).$$

Iš stačiojo trikampio B_1EB randame prizmės šoninę briauną: $BB_1 = \frac{EB}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$; todėl prizmės šoninio paviršiaus plotas S lygus statmenojo pjūvio perimetro ir šoninės briaunos sandaugai. Taigi

$$S = \frac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi + 1).$$

4. Pasirinkime n-kampį $A_1A_2...A_n$, kurio visos viršūnės yra vienoje plokštumoje, ir tašką S, nepriklausantį tai plokštumai. Tašką S sujunkime atkarpomis su taškais A_1, A_2, ..., A_n. Gausime n trikampių A_1A_2S, A_2A_3S, ..., A_nA_1S (7 pav.). Paviršius, sudarytas iš n-kampio $A_1A_2...A_n$ ir minėtų n trikampių, vadinamas *n-kampe piramide.* Daugiakampis $A_1A_2...A_n$ vadinamas *piramidės pagrindu*, taškas S – *piramidės viršūne*, trikampiai A_1A_2S, A_2A_3S, ..., A_nA_1S – *piramidės šoninėmis sienomis*, atkarpos A_1S, A_2S, ..., A_nS – *piramidės šoninėmis briaunomis*. Statmuo iš piramidės viršūnės S į pagrindo plokštumą, vadinamas *piramidės aukštine.*



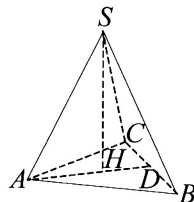
7 pav.

Piramidė yra vadinama *taisyklingąja*, jei jos pagrindas – taisyklingasis daugiakampis, o atkarpa, jungianti to daugiakampio centrą su piramidės viršūne, yra piramidės aukštinė. Taisyklingosios piramidės visos šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai. Jų aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės S, yra lygios; jos vadinamos piramidės *apotemomis.*

Piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus visų jos šoninių sienų plotų sumai. Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus jos pagrindo perimetro ir apotemos sandaugos pusei. Piramidės tūris lygus piramidės pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui.

4 pavyzdys. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi h, o visi plokštieji kampai prie viršūnės yra statieji. Rasime piramidės tūrį.

Sprendimas. Kadangi piramidė $SABC$ (8 pav.) taisyklingoji, tai jos pagrindas ABC yra lygiakraštis trikampis. Pagal sąlygą trikampiai ASB, BSC ir ASC yra statieji lygiašoniai trikampiai. Pažymėję piramidės šoninės briaunos ilgį a, gauname, kad pagrindo kraštinė lygi $a\sqrt{2}$. Tuomet pagrindo plotas yra



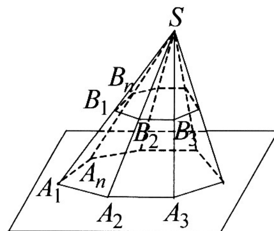
8 pav.

$$S = \frac{1}{2}AB^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot(a\sqrt{2})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2},$$

o pagrindo aukštinė AD lygi $\frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Jei taškas H – lygiakraščio trikampio ABC centras, tai $AH = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Kadangi piramidė taisyklingoji, tai SH yra jos aukštinė. Tuomet iš stačiojo trikampio ASH gauname: $AS^2 = AH^2 + SH^2$, $a^2 = \frac{2}{3}a^2 + h^2$.

Iš čia $a = \sqrt{3}h$, $S = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\sqrt{3}h)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}h^2$. Vadinasi, $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{\sqrt{3}}{2}h^3$.

5. $SA_1A_2...A_n$ šonines briaunas taškuose $B_1, B_2, ..., B_n$ kerta plokštuma, lygiagreti su pagrindo plokštuma (9 pav.). Šia plokštuma piramidė $SA_1A_2...A_n$ padalijama į du briaunainius. Briaunainis, kurio sienos yra n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ (didesnysis ir mažesnysis pagrindai), esantys lygiagrečiose plokštumose, ir n trapecijų $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ (šoninės sienos), vadinamos *nupjautine piramide*. Atkarpos A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n vadinamas nupjautinės piramidės *šoninėmis briaunomis*. Statmuo, nuleistas iš nupjautinės piramidės vieno pagrindo bet kurio taško į kitą pagrindą, vadinamas nupjautinės piramidės *aukštine*. Jei $SA_1A_2...A_n$ – taisyklingoji n-kampė piramidė, tai iš jos gaunama nupjautinė piramidė

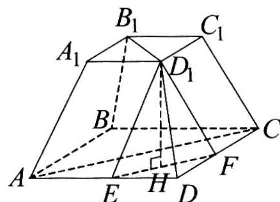


9 pav.

vadinama n-kampe *taisyklingąja nupjautine piramide*. Taisyklingosios nupjautinės piramidės visos šoninės sienos yra lygios lygiašonės trapecijos. Šių trapecijų aukštinės vadinamos nupjautinės piramidės *apotemomis*. Taisyklingosios nupjautinės piramidės pagrindai yra panašieji taisyklingieji n-kampiai; jų centrus jungianti atkarpa yra taisyklingosios nupjautinės piramidės aukštinė.Nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotu vadinama jos šoninių sienų plotų suma. Taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindų perimetrų sumos pusei, padaugintai iš apotemos. Jei S_1 ir S_2 – nupjautinės piramidės pagrindų plotai, H – jos aukštinė, tai nupjautinės piramidės tūris skaičiuojamas pagal formulę $V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$.

5 pavyzdys. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (10 pav.) pagrindų kraštinės yra $AB = 10$ ir $A_1B_1 = 6$. Per viršūnę D_1 nubrėžta plokštuma, statmena pagrindo įstrižainei B_1D_1. Gautojo pjūvio plotas lygus $6\sqrt{2}$. Rasime piramidės tūrį.

Sprendimas. Sakykime, kad plokštuma, einanti per piramidės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnę D_1 yra ir statmena įstrižainei B_1D_1, ir kerta piramidės briaunas AD ir CD taškuose E ir F. Kadangi piramidės pagrindai $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ yra kvadratai, tai kertančioji plokštuma yra lygiagreti su įstrižaine A_1C_1; taigi ir su įstrižaine AC. Todėl tiesės EF ir AC yra lygiagrečios. Vadinasi, kertančioji plokštuma yra lygiagreti su plokštuma, einančia per taškus A, C, C_1, A_1 (vadinamajai piramidės įstrižaininei plokštumai). Kadangi plokštuma, einanti per taškus A, D, D_1, A_1, kerta lygiagrečias plokštumas ACC_1A_1 ir EFD_1 lygiagrečiomis tiesėmis, tai tiesės AA_1 ir ED_1 lygiagrečios. Analogiškai $D_1F \| CC_1$. Taigi keturkampiai AA_1D_1E ir CC_1D_1F yra lygiagretainiai; todėl $ED = DF = 10 - 6 = 4$. Kadangi trikampis EDF yra statusis, tai $EF = 4\sqrt{2}$. Trikampio EFD_1 aukštinė D_1H yra statmena piramidės



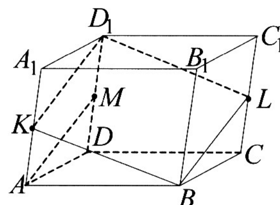
10 pav.

pagrindo plokštumai, todėl ji yra piramidės aukštinė. Pagal uždavinio sąlygą $S_{\Delta ED_1F}=\frac{1}{2}EF\cdot D_1H$, todėl $D_1H=\frac{2S_{\Delta ED_1F}}{EF}=\frac{2\cdot 6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=3.$

Tuomet piramidės tūris yra $V=\frac{3}{3}\left(10^2+8^2+\sqrt{10^2\cdot 8^2}\right)=196.$

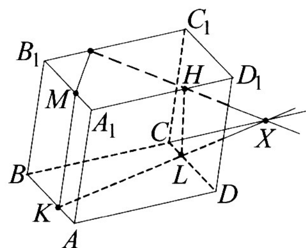
6. Sprendžiant daugelį briaunainių uždavinių, svarbu mokėti nubraižyti jų pjūvius, gautus kertant briaunainius įvairiomis plokštumomis. Briaunainį kertančioji plokštuma tai tokia plokštuma, kurios abiejose pusėse yra briaunainio taškų. Kertančioji plokštuma briaunainio sienas kerta atkarpomis. Daugiakampis, kurio kraštinės yra tos atkarpos, vadinamos *briaunainio plokščiuoju pjūviu.*

6 pavyzdys. Gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (11 pav.) kertamas plokštuma, einančia per taškus B, K ir L; čia K yra briaunos AA_1 vidurio taškas, o L – briaunos CC_1 vidurio taškas. Nubraižysime šį pjūvį ir įrodysime, kad jis yra lygiagretainis.



11 pav.

Sprendimas. Kadangi gretasienio sienos ADD_1A_1 ir BCC_1B_1 yra lygiagrečios, tai pjūvio plokštuma jas kerta lygiagrečiomis tiesėmis. Jei M yra atkarpos DD_1 vidurio taškas, tai keturkampis $MLBA$ yra lygiagretainis; todėl $AM\|BL$. Bet $AM\|KD_1$; todėl $KD_1\|BL$. Taigi pjūvio plokštuma sieną ADD_1A_1 kerta tiese KD_1. Vadinasi, pjūvio plokštuma eina per tašką D_1. Analogiškai įsitikiname, kad $KB\|D_1L$. Ieškomasis pjūvis yra lygiagretainis $KBLD_1$.



12 pav.

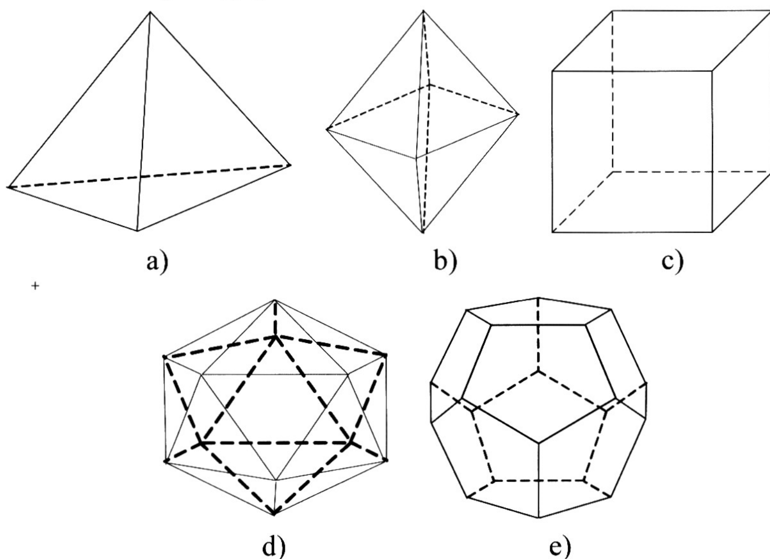
7 pavyzdys. Taškai P, H ir K yra gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (12 pav.) briaunose B_1C_1, CC_1 ir AB. Nubrėšime pjūvį, gautą gretasienį kertant plokštuma, einančia per taškus P, H ir K.

Sprendimas. Brėžiame tiesę PH ir randame jos susikirtimo su tiese BC tašką X. Tiesė KX kerta briauną CD taške L. Kertančioji plokštuma

gretasienio sienas $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ kerta lygiagrečiomis tiesėmis; todėl brėžiame $PM \| KL$, $M \in A_1B_1$. Penkiakampis $MKLHP$ yra ieškomasis pjūvis.

7. Iškilasis briaunainis vadinamas *taisyklinguoju briaunainiu*, jei visos jo sienos yra lygūs taisyklingieji daugiakampiai, o į kiekvieną viršūnę sueina vienodas briaunų skaičius. Taisyklingojo briaunainio visi dvisieniai kampai yra lygūs.

Yra šie taisyklingieji briaunainiai:



13 pav.

1) *taisyklingasis tetraedras* (sudarytas iš keturių lygiakraščių trikampių, 13 a) pav.);

2) *taisyklingasis oktaedras* (sudarytas iš aštuonių lygiakraščių trikampių, taisyklingasis oktaedras yra dvi taisyklingosios keturkampės piramidės, turinčios tą patį pagrindą, kurių sienos yra lygiakraščiai trikampiai, 13 b) pav.);

3) *taisyklingasis heksaedras* arba *kubas* (sudarytas iš šešių kvadratų, 13 c) pav.);

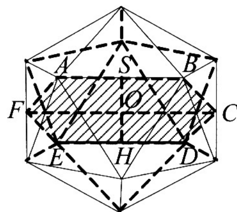
4) *taisyklingasis ikosaedras* (sudarytas iš dvidešimties lygiakraščių trikampių, 13 d) pav.);

5) *taisyklingasis dodekaedras* (sudarytas iš dvylikos taisyklingųjų penkiakampių, 13 e) pav.).

Antikinėje filosofijoje būties pagrindu buvo laikomi keturi gamtos elementai: žemė, vanduo, oras ir ugnis. Graikų filosofas Platonas teigė, kad žemės atomai turi tetraedro formą, vandens – kubo, oro – oktaedro, o ugnies atomai – ikosaedro formą. Dodekaedro formą Platonas suteikė visam pasauliui.

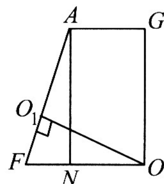
8 pavyzdys. Taisyklingojo ikosaedro briaunos ilgis lygus a. Rasime jo tūrį.

Sprendimas. Taisyklingąjį ikosaedrą sudaro 20 taisyklingųjų trikampių piramidžių, turinčių bendrą viršūnę O, kuri yra apie taisyklingąjį ikosaedrą apibrėžtos ir į jį įbrėžtos sferų centras (14 pav.). Rasime šių piramidžių aukštines. Sakykime, kad $ABCDEF$ – ikosaedro pjūvis, einantis per lygiagrečias briaunas AB ir ED bei sienų aukštines AF, FE, DC ir CB. Jei taškai G ir H yra briaunų AB ir ED vidurio taškai, tai $GH = CF$ (nes tai atstumai tarp taisyklingojo ikosaedro lygiagrečių briaunų vidurio taškų). Tiesės GH ir CF susikerta taške O. Pažymėkime: $OF = OG = d$ (tai atstumas nuo ikosaedro centro iki briaunos vidurio taško), $AF = b$ (tai ikosaedro sienos aukštinė), $OO_1 = h$ (tai atstumas nuo ikosaedro centro iki jo sienos, minėtų trikampių piramidžių aukštinė). Kad būtų patogiau nubrėžkime keturkampį $AGOF$ atskirai (15 pav.). Taip pat nubrėžkime $OO_1 \perp AF$ ir $AN \perp FO$. Akivaizdu, kad



14 pav.

AG yra pusė ikosaedro briaunos, $AG = \frac{a}{2}$; todėl $FN = d - \frac{a}{2}$. Iš panašiųjų trikampių AFN ir OFO_1 gauname: $\frac{AF}{OF} = \frac{AN}{OO_1}$, $\frac{b}{d} = \frac{d}{h}$. Iš čia $h = \frac{d^2}{b}$. Pagal Pitagoro teoremą (iš trikampio AFN) $FN^2 + AN^2 = AF^2$, t. y. $\left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = b^2$. Iš čia $d = \frac{a \pm \sqrt{8b^2 - a^2}}{4}$. Kadangi ikosaedro



15 pav.

sienos yra taisyklingieji trikampiai, tai sienos aukštinė yra $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Tada $8b^2 - a^2 = 5a^2 > a^2$; todėl $d = \frac{a(1+\sqrt{5})}{4}$,

$$h = \frac{a^2(1+\sqrt{5})^2}{16} : \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}a.$$

Vadinasi, ikosaedro tūris yra

$$V = \frac{20}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}a = \frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3.$$

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Stačiojo gretasienio pagrindas – rombas. Plokštuma, einanti per dvi lygiagrečias pagrindų briaunas, nesančias vienoje šoninėje sienoje, su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Gautojo pjūvio, kuriuo gretasienį kerta minėtoji plokštuma, plotas lygus Q. Raskite gretasienio šoninio paviršiaus plotą.

2. Stačiojo gretasienio pagrindas – lygiagretainis, kurio kraštinės lygios 1 ir 4, o smailusis kampas 60°. Gretasienio ilgesnioji įstrižainė lygi 5. Raskite gretasienio tūrį.

3. Pasvirosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindai yra lygiakraščiai trikampiai, kurių kraštinė lygi $3\sqrt{3}$. Viršūnės A_1 ortogonalioji projekcija yra pagrindo ABC centras. Prizmės visos šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampus. Raskite prizmės tūrį.

4. Pasvirosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas ABC yra statusis trikampis ABC ($\angle C = 90^\circ$). Viršūnės B_1 ortogonalioji projekcija plokštumoje ABC yra taškas C. Visos prizmės šoninės

briaunos lygios l ir su prizmės pagrindu sudaro kampą φ, o sienos BCC_1B_1 ir ABB_1A_1 sudaro dvisienį kampą lygų α. Raskite prizmės šoninio paviršiaus plotą.

5. Piramidės pagrindas – lygiašonis trikampis, kurio šoninė kraštinė lygi a, o kampas tarp šoninių kraštinių α. Visos piramidės šoninės briaunos į pagrindo plokštumą pasvirusios kampu β. Raskite piramidės tūrį.

6. Taisyklingosios trikampės piramidės visi plokštieji kampai prie viršūnės yra statieji, o pagrindo plotas Q. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

7. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinių ilgiai 8 ir 4. Per šoninę briauną ir su ja nesikertančios mažesniojo pagrindo kraštinės vidurio tašką nubrėžta plokštuma. Gautojo pjūvio plotas lygus $6\sqrt{3}$. Raskite piramidės tūrį.

8. Trikampės piramidės $ABCD$ briaunose AB, DB ir DC pažymėti atitinkamai taškai E, K ir P taip, kad tiesės PK ir BC nėra lygiagrečios. Nubrėžkite piramidės pjūvį, kai kertančioji plokštuma eina per taškus E, K ir P.

9. Taškai K, P ir M yra atitinkamai gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunose AA_1, A_1B_1 ir BC. Nubrėžkite gretasienio pjūvį, kai kertančioji plokštuma eina per taškus K, P ir M.

10. Taisyklingojo oktaedro briauna lygi a. Apskaičiuokite jo tūrį.



BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

**Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)**

1. Išspręskite lygtį

$$2|x+1|+|x-2|=5.$$

2. Išspręskite lygtį

$$\frac{15x^2-1}{28x}+\frac{7x}{15x^2-1}=1.$$

3. Raskite tūrį taisyklingosios trikampės piramidės, kurios šoninė briauna lygi 8 ir yra pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu.

4. Raskite kompleksinio skaičiaus $w=\left(-\sqrt{3}+i\right)^{11}$ modulį, realiąją ir menamąją dalis.



Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Nagrinėkime skaičiaus-milžino skaitmenų grupes: 1 ir 99 998, 2 ir 99 997, 3 ir 99 996 ir t. t. Tokių grupių yra $99\,998:2=49\,999$. Kadangi šių grupių skaitmenų sumos lygios 45 ir paskutinių penkių skaitmenų 99 999 suma lygi 45, tai skaičiaus-milžino skaitmenų suma lygi $50\,000\cdot 45=2\,250\,000$.

Ats.: 2 250 000.

2. Sakykime, kad ieškomasis skaičius yra $1000x+y$; čia y – triženklis skaičius. Pagal sąlygą sudarome lygtį $1000x+y=57y$. Toliau:

$$1000x+y=57\cdot y \Rightarrow 1000x=56y \Rightarrow y=\frac{1000x}{8\cdot 7}=125\cdot\frac{x}{7}\Rightarrow x=7,$$

$y=125$.

Ats.: 7 125.

3. Sakykime, x, y ir z yra pirminiai skaičiai ir $z=x^3-y^3$. Tada

$z=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)\Rightarrow x-y=1\Rightarrow x=3$ ir $y=2\Rightarrow$

$\Rightarrow z=19$.

Ats.: 3, 2, 19.

4. $x^2-6x+y-4\sqrt{y}+13=(x-3)^2+(\sqrt{y}-2)^2=0\Rightarrow x=3,\ y=4.$

Ats.: (3; 4).

5. $$\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{3-x}>0,\\ \dfrac{2}{3-x}>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{3-x}>0,\\ \dfrac{2}{3-x}-1>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{3-x}>0,\\ \dfrac{x-1}{3-x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 2,\\ \dfrac{x-1}{x-3}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 2,\\ 1<x<3\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \; x \in (1;2) \cup (2;3).$

Ats.: $x \in (1;2) \cup (2;3).$

6. Sakykime, Naglis piešė snaiges n lapuose. Tada Miglė (pagal sąlygą) panaudojo ne mažiau kaip $n+1$ lapą, o Ugnė – ne mažiau kaip $2n+2$ lapus; Ugnė nupiešė ne mažiau kaip $2n+2$ snaiges, o Miglė – ne mažiau kaip $2n+3$ snaiges. Taigi Naglis nupiešė ne mažiau kaip $4n+6$ snaiges. Kita vertus, n lapuose Naglis galėjo nupiešti ne daugiau kaip $5n$ snaigių. Tada $4n+6 \le 5n \Rightarrow n \ge 6$.

Ats.: 30.

7. Sakykime, kad Antanaitis, Jonaitis ir Petraitis turėjo atitinkamai x, $2x$ ir x šalininkų, o rinkimuose dalyvavo atitinkamai $5y$, $5y$ ir $6y$ rinkėjų. Pagal sąlygą galioja lygybė $5y+5y+6y=0{,}6(x+2x+x)$. Tada

$$5y+5y+6y=0{,}6(x+2x+x) \Rightarrow 16y=0{,}6\cdot 4x \Rightarrow y=\frac{3}{20}x.$$

Vadinasi, už Antanaitį neatėjo balsuoti $x-5y=x-\frac{3}{4}x=$ $=0{,}25x$ jo šalininkų, t. y. 25 %; už Jonaitį neatėjo balsuoti $2x-5y=2x-\frac{3}{4}x=0{,}625\cdot 2x$ jo šalininkų, t. y. 62,5 %; už Petraitį neatėjo balsuoti $x-6y=x-\frac{9}{10}x=0{,}1\cdot x$, t. y. 10 % jo šalininkų.

Ats.: 25 %, 62,5 %, 10 %.

8. $$\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=\frac{(2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ)\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ}{2\cos 10^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 20^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\cos 20^\circ}{4\cos 10^\circ}=\frac{\sin 40^\circ\cdot\sin 50^\circ}{4\cos 10^\circ}=$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{8\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{8\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{8\cos 10^\circ} = \frac{1}{8}.$$

9. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{BME}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{MBC}} \cdot \dfrac{S_{MBC}}{S_{BME}} = \dfrac{AC}{MC} \cdot \dfrac{BC}{BE}.$

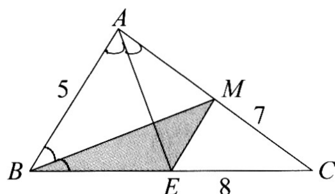
Kita vertus,

$\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{AC}{MC} = \dfrac{13}{8};$

$\dfrac{EC}{BE} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{12}{5}.$

Taigi $\dfrac{S_{ABC}}{S_{BME}} = \dfrac{13}{8} \cdot \dfrac{12}{5} = \dfrac{39}{10}.$

Ats.: 39:10.



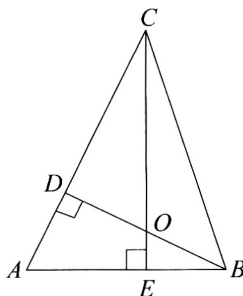
10. $\Delta ADB = \Delta ODC$, nes $OC = AB$ (įžambinės) – pagal sąlygą;

$\angle ABD = 90^\circ - \angle BAC = \angle ACE \Rightarrow$ $BD = DC$.

Kadangi $\angle CDB = 90^\circ$, tai

$\angle DCB = 45^\circ$.

Ats.: 45°.



PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Lygtį pertvarkome taip:

$$x^2(x^2 + 2x + 2) = 8(x^2 + 2x + 1),$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 = 8x^2 + 16x + 8,$$

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 16x - 8 = 0.$$

Galimi šios lygties sveikieji sprendiniai: $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$. Tinka –2. Dalijame kampu:

$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^3-6x^2-16x-8 & x+2 \\ \hline -\;x^4+2x^3 & x^3-6x-4 \\ \quad\quad -6x^2-16x-8 & \\ \quad\quad -\;-6x^2-12x & \\ \quad\quad\quad\quad -4x-8 & \\ \quad\quad\quad\quad -\;-4x-8 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Daugianaris x^3-6x-4 turi šaknį -2 (kandidatai $\pm 1; \pm 2; \pm 4$). Vėl dalijame:

$$\begin{array}{l|l} x^3-6x-4 & x+2 \\ \hline -\;x^3+2x^2 & x^2-2x-2 \\ \quad -2x^2-6x-4 & \\ \quad -\;-2x^2-4x & \\ \quad\quad -2x-4 & \\ \quad\quad -\;-2x-4 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Taigi pradinė lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(x-2)^2(x^2-2x-2)=0.$$

Spręsdami ją, gauname $x=2$ arba $x^2-2x-2=0$, $(x-1)^2=3$, $x=1\pm\sqrt{3}$.

Ats.: $\{-2; 2; 1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\}$.

2. Taikome skaidymo dauginamaisiais metodą:

$$\left(\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{2(x-4)}\right)^2=\frac{49}{4}\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2,$$

$$\left(\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{2(x-4)}-\frac{7(x-2)}{2(x-4)}\right)\left(\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{2(x-4)}+\frac{7(x-2)}{2(x-4)}\right)=0,$$

$$\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{3(x-2)}{x-4}\right)\left(\frac{x+1}{x-2}+\frac{4(x-2)}{x-4}\right)=0,$$

$$\frac{(2x^2-9x+16)(5x^2-19x+12)}{(x-2)^2(x-4)^2}=0.$$

Lygtis $2x^2-9x+16=0$ sprendinių neturi, o lygties $5x^2-19x+12=0$ sprendiniai yra 0,8 ir 3; jie tenkina sąlygas $x \neq 2$ ir $x \neq 4$.

Ats.: $\{0{,}8;\ 3\}$.

3. Pažymėkime $t=x^2-3x+4$. Tada gauname:

$$\frac{1}{t-1}+\frac{2}{t}-\frac{6}{t+1}=0 \Rightarrow \frac{3t^2-7t+2}{t(t^2-1)}=0 \Rightarrow \begin{cases} 3t^2-7t+2=0, \\ t(t^2-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \in \left\{\frac{1}{3};\ 2\right\}.$$

Toliau sprendžiame dvi kvadratines lygtis: $x^2-3x+4=\frac{1}{3}$ ir $x^2-3x+4=2$. Pirmoji lygtis sprendinių neturi, o antroji turi du sprendinius: 1 ir 2.

Ats.: $\{1;\ 2\}$.

4. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow ((x+1)(x+4))((x+2)(x+3))=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=x^2+5x+5, \\ (t-1)(t+1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=x^2+5x+5, \\ t^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=x^2+5x+5, \\ t \in \{-2;\ 2\}. \end{cases}$$

Kai $t=-2$, gauname: $x^2+5x+5=-2 \Rightarrow x^2+5x+7=0$. Ši lygtis sprendinių neturi.

Kai $t=2$, sprendžiame lygtį $x^2+5x+5=2$ ir gauname du sprendinius: $\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ ir $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

Ats.: $\left\{\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}\right\}.$

5. Pertvarkome kairiąją lygties pusę:

$$\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+10}=\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}\right)+\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+9}\right)=$$

$$=\frac{4}{x^2+16x+60}+\frac{2}{x^2+16x+63}.$$

Pažymėkime $t=x^2+16x+60$ ir gausime:

$$\frac{4}{t}+\frac{2}{t+3}=\frac{21}{20}\Rightarrow\frac{7t^2-19t-80}{t(t+3)}=0\Rightarrow t\in\left\{-\frac{16}{7}; 5\right\}.$$

Lygties $x^2+16x+60=-\dfrac{16}{7}$ sprendinių aibė yra $\left\{-8-\dfrac{2\sqrt{21}}{7}; -8+\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\right\}$, o lygties $x^2+16x+60=5$ sprendinių aibė yra $\{-11; -5\}$.

Ats.: $\left\{-11; -5; -8-\dfrac{2\sqrt{21}}{7}; -8+\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\right\}.$

6. Kadangi $\dfrac{3}{(x-2)(x-6)}+1=\dfrac{3+x^2-8x+12}{(x-2)(x-6)}=\dfrac{x^2-8x+15}{(x-2)(x-6)}$, tai lygtis ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases}(x^2-8x+15)(x^2-8x+16)=12,\\ x\neq 2, x\neq 6.\end{cases}$$

Pažymėkime $t=x^2-8x+15$ ir išspręskime lygtį $t(t+1)=12$:

$$t(t+1)=12\Rightarrow t^2+t-12=0\Rightarrow t\in\{-4; 3\}.$$

Toliau sprendžiame lygtis

$$x^2-8x+15=3 \text{ ir } x^2-8x+15=-4.$$

Antroji lygtis sprendinių neturi, o pirmosios lygties sprendiniai (2 ir

6) netenkina sąlygos $x \neq 2$, $x \neq 6$. Taigi sistema sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

7. Pažymėkime $t = 3x + \dfrac{1}{x}$; tada

$$18x^2 + \frac{2}{x^2} = 2\left(9x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2\left(\left(3x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\right) = 2\left(t^2 - 6\right).$$

Pakeitę kintamąjį, gausime lygtį $2(t^2 - 6) = 16 - t$, turinčią du sprendinius: $\dfrac{7}{2}$ ir -4.

Kai $t = \dfrac{7}{2}$, sprendžiame lygtį $3x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{2}$ ir gauname:

$$\begin{cases} 6x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right\}.$$

Kai $t = -4$, sprendžiame lygtį $3x + \dfrac{1}{x} = -4$ ir gauname:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 = 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}.$$

Ats.: $\left\{-1; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right\}$.

8. Pažymėkime $t = x + 4$ ir spręskime lygtį $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16$. Atlikę veiksmus, kairėje pusėje gausime reiškinį $2t^4 + 12t^2 + 2$. Toliau sprendžiame bikvadratinę lygtį $t^4 + 6t^2 - 7 = 0$, kuri turi du realiuosius sprendinius: 1 ir -1. Iš lygčių $x + 4 = 1$ ir $x + 4 = -1$ gauname uždavinio atsakymą – lygties sprendinių aibę $\{-5; -3\}$.

Ats.: $\{-5; -3\}$.

9. Sudėję trupmenas, kairėje pusėje gausime $\dfrac{2x^3+3x^2+3x+4}{(x+1)(x+2)}$, todėl toliau nagrinėkime lygtį

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)(x+2)}=0,$$

kuri ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2+3x+2=0, \\ (x+1)(x+2)\neq 0. \end{cases}$$

Lygties $2x^3+3x^2+3x+2=0$ kairiąją pusę galima išreikšti sandauga:

$$2x^3+3x^2+3x+2=(2x^3+2)+(3x^2+3x)=$$
$$=2(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=(x+1)(2x^2+x+2).$$

Todėl ši lygtis yra ekvivalenti lygčiai $(x+1)(2x^2+x+2)=0$. Lygtis $2x^2+x+2=0$ sprendinių neturi, o iš lygties $x+1=0$ gauname $x=-1$. Bet šis sprendinys netenkina sąlygos $(x+1)(x+2)\neq 0$.

Darome išvadą, kad lygtis sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

10. Kadangi $x=0$ nėra lygties sprendinys, tai padaliję dešinės pusės trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš x, gausime ekvivalenčią lygtį

$$x-6-\frac{9}{x}=\frac{x-4-\dfrac{9}{x}}{x-6-\dfrac{9}{x}}.$$

Pažymėję $t=x-\dfrac{9}{x}$, gausime lygtį $t-6=\dfrac{t-4}{t-6}$. Toliau sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} t^2-13t+40=0, \\ t-6\neq 0. \end{cases}$$

Ji turi du sprendinius: 5 ir 8.

Iš lygčių $x-\dfrac{9}{x}=5$ ir $x-\dfrac{9}{x}=8$ randame visus pradinės lygties sprendinius: $\dfrac{5\pm\sqrt{61}}{2}$ (iš pirmosios) ir $\dfrac{4\pm5}{2}$ (iš antrosios).

Ats.: $\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2};\dfrac{5-\sqrt{61}}{2};\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu broliui yra b metų, seseriai – s metų, o po t metų brolio metų skaičius bus toks, kokį nusako uždavinio sąlyga. Sudarome sistemą

$$\begin{cases} b+s=26, \\ (b+t)+(s+t)=5b, \\ 3s=b+t, \end{cases}$$

Kurią išsprendę gauname: $b=14$, $s=12$, $t=22$.

Ats.: dabar broliui 14 metų, o seseriai 12 metų.

2. Galima bandyti ieškoti sprendinio imant $a=b=c=n$, arba $a=b=n$, $c=n^2$ ir t. t. Šiuo atveju tokio tipo sprendinių nėra.

Kaip ir išspręstame 7 pavyzdyje nustatome, kad visi skaičiai a, b, c gali būti lyginiai. Sprendinio ieškokime imdami $a=2^x$, $b=2^y$, $c=2^z$. Tada:

$$2^{3x}+2^{5y}=2^{2z} \Rightarrow 2^{3x-2z}+2^{5y-2z}=1.$$

Pastaroji lygybė galioja, kai

$$\begin{cases} 3x-2z=-1, \\ 5y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{3x+1}{2}=\frac{5y+1}{2}.$$

Pasirinkę $x=5$ ir $y=3$, gauname $z=8$. Taigi lygties vienas sprendinys yra $a=2^5$, $b=2^3$, $c=2^8$.

Aišku, ši lygtis turi ir daugiau sprendinių.

Ats.: $a = 2^5$, $b = 2^3$, $c = 2^8$.

3. Šaknies $\sqrt{x+2-x^2}$ apibrėžimo sritis yra $[-1; 2]$, o šaknies $\sqrt{x^2-3x+2}$ – $(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$; taigi nelygybės apibrėžimo sritis yra aibė $[-1; 1]\cup\{2\}$. Patikrinę, įsitikiname, kad $x = 2$ yra nelygybės sprendinys.

Ieškosime nelygybės sprendinių intervale $[-1; 1]$. Aišku, kad $x = 0$ nėra sprendinys. Toliau sprendinių ieškosime intervaluose $[-1; 0)$ ir $(0; 1]$.

1) $x \in [-1; 0)$. Nelygybės $\sqrt{x+2-x^2} - x < \sqrt{x^2-3x+2}$ abi pusės teigiamos, todėl galima kelti kvadratu:

$$x+2-x^2-2x\cdot\sqrt{x+2-x^2}+x^2 < x^2-3x+2,$$

$$4x-x^2 < 2x\sqrt{x+2-x^2}.$$

Iš čia

$$4-x > 2\sqrt{x+2-x^2}.$$

Dar kartą pakėlę kvadratu (vėl abi pusės yra teigiamos), gauname:

$$16-8x+x^2 > 4x+8-4x^2,$$

$$5x^2-12x+8 > 0.$$

Šią nelygybę tenkina visi intervalo $[-1; 0)$ skaičiai.

2) $x \in (0; 1]$. Nelygybę $\sqrt{x+2-x^2} < \sqrt{x^2-3x+2} + x$ keliame kvadratu:

$$x+2-x^2 < x^2-3x+2+2x\sqrt{x^2-3x+2}+x^2,$$

$$2x\sqrt{x^2-3x+2} > 4x-3x^2.$$

Iš čia

$$2\sqrt{x^2-3x+2} > 4-3x.$$

Abi nelygybės pusės yra teigiamos, todėl galima kelti kvadratu:

$$4(x^2-3x+2)>16-24x+9x^2,$$

$$5x^2-12x+8<0.$$

Ši nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: $[-1;0)\cup\{2\}$.

4. Padaliję lygybę $a^{2b}-4^b=(2a)^b$ iš 4^b, gauname lygybę $\left(\frac{a}{2}\right)^{2b}-1=\left(\frac{a}{2}\right)^b$. Pažymėkime $\left(\frac{a}{2}\right)^b=z$; tada

$$z^2-z-1=0\Rightarrow z_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Reikšmė $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ yra neigiama ir ji lygčiai netinka, nes $z>0$. Taigi, $z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tuomet

$$\left(\frac{a}{2}\right)^b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow b=\log_{\frac{a}{2}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ats.: $b=\log_{\frac{a}{2}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Perkėlę visus narius į kairę pusę ir subendravardiklinę, gausime lygybę

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc\,(a+b+c)}=0,$$

iš kurios ir išplaukia įrodomasis teiginys.

6. Lygties sprendinių ieškokime trijuose intervaluose: $(-\infty;0)$, $[0;2.]$, $(2;+\infty)$.

1) $x\in(-\infty;0)$. Šiuo atveju gauname:

$$-x^3+(x-2)^3=8\Rightarrow 3x^2-6x+8=0\ \Rightarrow\varnothing.$$

2) $x\in[0;2]$. Gauname:

$$x^3+(x-2)^3=8 \Rightarrow x^3-2^3+(x-2)^3=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4)+(x-2)^3=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4+x^2-4x+4)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(x-2)(x^2-x+4)=0 \Rightarrow x=2.$$

3) $x \in (2;+\infty)$. Tada

$$x^3-(x-2)^3=8 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4-(x^2-4x+4))=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)\,x=0 \Rightarrow x\in\{0;2\}.$$

Taigi intervale $(2;+\infty)$ lygtis sprendinių neturi.

Ats.: 2.

7. Lygtį spręskime kairiąją jos pusę skaidydami dauginamaisiais:

$$x^3+(2\sqrt{3}-1)\,x^2+12=(x+2\sqrt{3})\,(x^2-x+2\sqrt{3})=0 \Rightarrow x=-2\sqrt{3}.$$

Ats.: $-2\sqrt{3}$.

8. Pažymėkime $f(x)=2x^2+5x-4$ ir išspręskime lygtį $f(x)=x$, t. y. $2x^2+5x-4=x$:

$$2x^2+5x-4=x \Rightarrow x^2+2x-2=0 \Rightarrow x_1=-1-\sqrt{3},\, x_2=-1+\sqrt{3}.$$

Kitus du sprendinius gausime lygties kairiąją pusę dalydami (kampu) iš $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+2x-2$:

$$\frac{2\,(2x^2+5x-4)^2+5\,(2x^2+5x-4)-x-4}{x^2+2x-2}=0 \Rightarrow$$

$$2x^2+6x-1=0 \Rightarrow x_3=\frac{-3-\sqrt{11}}{2};\ x_4=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}.$$

Ats.: $\left\{-\frac{3+\sqrt{11}}{2};\,-(1+\sqrt{3});\ \frac{\sqrt{11}-3}{2};\ \sqrt{3}-1\right\}.$

9. Kadangi $\left(\sqrt{3x^2+x+5}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2-x-2}\right)^2=2x+7$, tai lygtis ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2+x+5}+\sqrt{3x^2-x-2}=\dfrac{2x+7}{3},\\ \sqrt{3x^2+x+5}-\sqrt{3x^2-x-2}=3.\end{cases}$$

Iš čia

$$2\sqrt{3x^2+x+5}=\frac{2x+16}{3}\Rightarrow\sqrt{3x^2+x+5}=\frac{x+8}{3}.$$

Pakėlę abi puses kvadratu, gauname:

$$3x^2+x+5=\frac{(x+8)^2}{9}\Rightarrow 27x^2+9x+45=x^2+16x+64\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26x^2-7x-19=0\Rightarrow x\in\left\{-\frac{19}{26};1\right\}.$$

Ats.: $\left\{-\frac{19}{26};\ 1\right\}$.

10. Pažymėję $u=\sqrt[4]{10+x+x^2}$, $v=\sqrt[4]{7-x-x^2}$, gauname sistemą

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^4+v^4=17.\end{cases}$$

Kadangi $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=[(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2$, tai pažymėjus $t=uv$, antrąją sistemos lygtį galima pakeisti lygtimi $(9-2t)^2-2t^2=17$. Šios lygties sprendiniai yra $t_1=2$, $t_2=16$.

Gauname dvi sistemas:

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u\cdot v=2\end{cases}\quad\text{ir}\quad\begin{cases}u+v=3,\\ u\cdot v=16.\end{cases}$$

Pirmosios sistemos sprendiniai yra (1; 2) ir (2; 1), o antroji sistema sprendinių neturi. Lygtis $\sqrt[4]{10+x+x^2}=1$ sprendinių neturi, o lygtis $\sqrt[4]{10+x+x^2}=2$ turi du sprendinius: $x_1=-3$ ir $x_2=2$.

Ats.: $\{-3;\ 2\}$.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pažymėkime $x = \sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Gauname lygtį $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{35}{12}$. Iš čia $\sin\alpha = 0{,}6$ arba $\sin\alpha = 0{,}8$. Vadinasi, $x \in \{0{,}6; 0{,}8\}$.

Ats.: 0,6; 0,8.

2. Pažymėkime $x = \sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Gauname lygtį

$$\cos\alpha = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha,$$
$$\cos\alpha = -\sin 3\alpha,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin 3\alpha = 0,$$
$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = 0.$$

Iš čia gauname $\frac{\pi}{4} + \alpha = 0$ arba $\frac{\pi}{4} - 2\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$. Taigi $\alpha \in \left\{-\frac{3\pi}{8}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8}\right\}$. Vadinasi,

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = -\sin\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};$$

$$x_3 = -\sin\frac{3\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Ats.: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

3. Taikydami keitinį $x = \sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, gauname lygtį

$$\sin^2\alpha\cos\alpha = |\sin\alpha|^3 - |\sin\alpha| + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nagrinėkime atvejį $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; tada $|\sin\alpha| = \sin\alpha$. Toliau gauname:

$$\sin^2\alpha\cos\alpha = \sin^3\alpha - \sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\alpha\cos^2\alpha,$$

$$\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot \left(\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 2\alpha \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Ši lygybė intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ įmanoma tik tada, kai $\sin 2\alpha = 1$ ir $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Iš čia $\alpha = \frac{\pi}{4}.$

Vadinasi, $x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Kai $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, analogiškai spręsdami gautume $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Ats.: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}.$

4. Taikydami keitinį $2x = \cos 2\alpha$, $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, gauname:

$$\sqrt{1-\cos 2\alpha}\left(1-2\cos 2\alpha\sqrt{1+\cos 2\alpha}\right)=2\cos^2 2\alpha-1,$$

$$\sqrt{2}\left|\sin\alpha\right|\left(1-2\cos 2\alpha\cdot\sqrt{2}\left|\cos\alpha\right|\right)=\cos 4\alpha,$$

$$\sqrt{2}\sin\alpha\left(1-2\sqrt{2}\cos\alpha\cos 2\alpha\right)=\cos 4\alpha,$$

$$\sqrt{2}\sin\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha=\cos 4\alpha,$$

$$\sqrt{2}\sin\alpha-\sin 4\alpha=\cos 4\alpha,$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 4\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 4\alpha,$$

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right),$$

$$\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha=0,$$

$$2\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{5\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Iš čia

$$\frac{3}{2}\alpha+\frac{\pi}{8}=\pi k,\quad \frac{5}{2}\alpha+\frac{\pi}{8}=(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k\in Z,$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\left(\pi k-\frac{\pi}{8}\right),\quad \alpha=\frac{2}{5}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right),\ k\in Z.$$

Intervalui $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ priklauso vienintelė α reikšmė $\alpha=\frac{3\pi}{20}$, su kuria

$$x=\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{10}.$$

Ats.: $\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{10}$.

5. Taikydami keitinį $x = a\cos\alpha$, $y = a\sin\alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi]$, gauname:

$$\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{3a^2\sin^2\alpha - 4a^2\sin\alpha\cos\alpha}{a^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha} =$$

$$3\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha = 3\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2} - 2\sin 2\alpha =$$

$$= \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\right) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\cos 2\alpha + \frac{4}{5}\sin 2\alpha\right).$$

Tegu φ yra kampas, su kuriuo $\sin\varphi = \frac{3}{5}$ ir $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Tada

$$\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}(\sin\varphi\cos 2\alpha + \cos\varphi\sin 2\alpha) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\sin(2\alpha + \varphi).$$

Vadinasi, didžiausia reiškinio reikšmė lygi $\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\cdot(-1) = 4.$

Ats.: 4.

6. Taikydami keitinį $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi]$, gauname:

$4\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = 1$, $2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 1$, $\sin 4\alpha = 1$,

$$4\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}.$$

Iš čia $\alpha = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$.

Belieka apskaičiuoti x ir y reikšmes:

$$x_1 = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad y_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

$$x_2 = \sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$y_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$x_3 = \sin\frac{9\pi}{8} = -\sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$y_3 = \cos\frac{9\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

$$x_4 = \sin\frac{13\pi}{8} = -\sin\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$y_4 = \cos\frac{13\pi}{8} = -\cos\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Ats.: $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$,

$\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

7. Pirmųjų dviejų lygčių sistemą užrašykime taip:

$$\frac{x}{3(1+x^2)} = \frac{y}{4(1+y^2)} = \frac{z}{5(1+z^2)}. \qquad (1)$$

Kadangi $xy + yz + zx = 1$, tai taikome keitinį $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi)$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Gauname sistemą

$$\frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\sin\beta}{4} = \frac{\sin\gamma}{5}.$$

Iš sinusų teoremos išplaukia, kad α, β, γ – trikampio, kurio kraštinės proporcingos skaičiams 3, 4, 5, kampai. Šis trikampis yra statusis $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$; todėl $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Tada $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$. Taigi turime sprendinį $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right)$. Aišku, kad $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -1\right)$ taip pat yra sprendinys.

Ats.: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -1\right)$.

8. Sistemą užrašykime taip:

$$\begin{cases} x = 4y^3 - 3y, \\ y = 4z^3 - 3z, \\ z = 4x^3 - 3x. \end{cases}$$

Įrodykime, kad $x, y, z \in [-1; 1]$. Tarę, kad $|x| > 1$, gauname $|z| = |4x^3 - 3x| = |x| \cdot |4x^2 - 3| > 1$ ir $|y| = |4z^3 - 3z| = |z| \cdot |4z^2 - 3| > 1$.

Tada

$$|xyz| = |(4y^3 - 3y)(4z^3 - 3z)(4x^3 - 3x)| =$$
$$= |xyz|(4y^2 - 3)(4z^2 - 3)(4x^2 - 3) > |xyz|.$$

Taigi prielaidą, kad $|x| > 1$, turime atmesti. Analogiškai galima įrodyti, kad $|y| \le 1$ ir $|z| \le 1$.

Taikydami keitinį $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, gauname

$$z = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha,$$
$$y = \cos 9\alpha,$$
$$x = \cos 27\alpha.$$

Vadinasi, $\cos\alpha = \cos 27\alpha$. Tada:

$$\cos 27\alpha - \cos\alpha = 0,$$
$$-2\sin 13\alpha \sin 14\alpha = 0,$$
$$13\alpha = \pi k \text{ arba } 14\alpha = \pi k.$$

Iš čia

$$\alpha = \frac{\pi k}{13} \text{ arba } \alpha = \frac{\pi k}{14}, \ (k = 0,1,2,...,13).$$

Taigi

$$x_1 = \cos\frac{\pi k}{13}, \quad x_2 = \cos\frac{\pi k}{14},$$

$$y_1 = \cos\frac{9\pi k}{13}, \quad y_2 = \cos\frac{9\pi k}{14},$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi k}{13}, \quad z_2 = \cos\frac{3\pi k}{14}; \quad k = 0, 1, 2, ..., 13.$$

Ats.: $\left(\cos\frac{\pi k}{13}; \cos\frac{9\pi k}{13}; \cos\frac{3\pi k}{13}\right)$,

$\left(\cos\frac{\pi k}{14}; \cos\frac{9\pi k}{14}; \cos\frac{3\pi k}{14}\right)$, $k = 0, 1, 2, ..., 13.$

9. Nelygybę pertvarkome

$$\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \le \sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)} \le 2.$$

Taikydami keitinį $\frac{c}{a} = \sin 2\alpha, \frac{c}{b} = \sin 2\beta \left(\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right)$, gauname:

$\frac{c}{a}+\frac{c}{b} = \sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \le 2\cos(\alpha-\beta)$,

$\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)} = (\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta) +$

$+ (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\beta - \sin\beta) = 2\cos(\alpha-\beta) \le 2.$

Taigi dviguba nelygybė įrodyta.

10. Nelygybę pertvarkome taip:

$$\left|\frac{c}{b}-\frac{c}{a}\right| \le \sqrt{\frac{c}{b}\left(1-\frac{c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a}\left(1-\frac{c}{b}\right)} \le 1.$$

Taikydami keitinį $\frac{c}{a} = \cos^2\alpha, \frac{c}{b} = \cos^2\beta, \alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ir tarę, kad tiriamoji dviguba nelygybė yra teisinga, gauname:

$$\left|\cos^2\alpha - \cos^2\beta\right| \le \cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta \le 1,$$

$$\left|(\cos\beta - \cos\alpha)(\cos\beta + \cos\alpha)\right| \le \sin(\alpha+\beta) \le 1,$$

$$\left|-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \le \sin(\alpha+\beta) \le 1.$$

$$\left|\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\right| \le \sin(\alpha+\beta) \le 1.$$

Pastaroji nelygybė yra akivaizdi, todėl prielaida yra teisinga.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu v yra keliautojo vidutinis greitis (km per dieną). Pagal uždavinio sąlygą turi galioti dvi nelygybės:

$$8(v+20)<1000 \text{ ir } 12\left(v-15\frac{2}{3}\right)>1000.$$

Iš pirmosios nelygybės gauname $v<105$, o iš antrosios – $v>99$, taigi $99<v<105$.

Ats.: $99<v<105$.

2. Tegu v yra pačios valties greitis. Tada kelionės trukmės skaičiavimo formulė yra

$$\frac{10}{v+1}+\frac{6}{v-1},\ v>1.$$

Pagal uždavinio sąlygą reikia išspręsti dvigubą nelygybę

$$3\le\frac{10}{v+1}+\frac{6}{v-1}\le 4,\ \text{kai } v>1.$$

Gausime:

$$\begin{cases}\dfrac{10}{v+1}+\dfrac{6}{v-1}\ge 3,\\ \dfrac{10}{v+1}+\dfrac{6}{v-1}\le 4,\\ v>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{16v-4}{v^2-1}\ge 3,\\ \dfrac{16v-4}{v^2-1}\le 4,\\ v>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{16v-4}{v^2-1}-3\ge 0,\\ \dfrac{16v-4}{v^2-1}-4\le 0,\\ v>1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{3v^2-16v+1}{v^2-1}\le 0,\\ \dfrac{4v^2-16v}{v^2-1}\ge 0,\\ v>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3v^2-16v+1\le 0,\\ 4v^2-16v\ge 0,\\ v>1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{8-\sqrt{61}}{3} \le v \le \frac{8+\sqrt{61}}{3}, \\ v \le 0 \text{ arba } v \ge 4, \\ v > 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \le v \le \frac{8+\sqrt{61}}{3}.$$

Ats.: $4 \le v \le \frac{8+\sqrt{61}}{3}$.

3. Tegu s yra atstumas tarp A ir B, u – katerio greitis, v – upės srovės greitis. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybė

$$\frac{s}{u+v} + \frac{s}{u-v} = 10$$

ir nelygybė

$$\frac{s}{1{,}4u+v} + \frac{s}{1{,}4u-v} \le 7.$$

Reikia rasti $\frac{s}{u-v}$; tai laikas, per kurį kateris nuplaukė iš punkto B į punktą A (plaukdamas prieš srovę). Ryšys tarp srovės greičio v ir atstumo s išreiškiamas formule $s = 24v$. Taigi reikia išspręsti sistemą

$$\begin{cases} \frac{24v}{u+v} + \frac{24v}{u-v} = 10, \\ \frac{24v}{1{,}4u+v} + \frac{24v}{1{,}4u-v} \le 7. \end{cases}$$

Sprendžiant ją reikia turėti mintyje, kad turi būti $u > 0$, $v > 0$ ir $u > v$.

Išsprendę lygtį, gausime $u = 5v$. Tada

$$\frac{24v}{1{,}4u+v} + \frac{24v}{1{,}4u-v} = \frac{24v}{1{,}4 \cdot 5v+v} + \frac{24v}{1{,}4 \cdot 5v - v} = \frac{24v}{8v} + \frac{24v}{6v} = 3+4=7.$$

Taigi sistemos nelygybė galioja, kai upės srovės greitis v yra bet kuris teigiamas skaičius.

Katerio sugaištą laiką jam plaukiant iš B į A apskaičiuojame taip:

$$\frac{s}{u-v}=\frac{24v}{5v-v}=6\ \text{(h)}.$$

Ats.: 6 h.

4. Tegu p yra deimanto gabalo svoris (tam tikrais svorio vienetais), o p_1, p_2 ir p_3 – šio deimanto gabalo trijų dalių svoriai (tais pačiais svorio vienetais). Aišku, kad $p_1+p_2+p_3=p$. Deimanto kainą pažymėkime C, o jo dalių C_1, C_2 ir C_3. Pagal uždavinio sąlygą gauname:

$$C=kp^2=k(p_1+p_2+p_3)^2,$$

$$C_1=kp_1^2,\ C_2=kp_2^2,\ C_3=kp_3^2,$$

čia $k>0$ – proporcingumo koeficientas. Todėl

$$C-(C_1+C_2+C_3)=k\left((p_1+p_2+p_3)^2-(p_1^2+p_2^2+p_3^2)\right)=$$

$$=2k(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)>0.$$

Vadinasi, $C>C_1+C_2+C_3$.

Ats.: Perkant visą gabalą.

5. Tegu x ir y ieškomi natūralieji skaičiai. Pagal uždavinio sąlygą $x+y=119$, $x=7m$, $y=7n$; m ir n – tarpusavyje pirminiai skaičiai. Gauname lygtį $7(m+n)=119$. Iš čia $m+n=17$. Galimos m ir n skaičių poros $(m;n)$, $m<n$ tokios: (1; 16), (2; 15), (3; 14), (4; 13), (5; 12), (6; 11), (7; 10), (8; 9). Didžiausia skaičių m ir n sandauga yra 72 (kai $m=8$, $n=9$). Taigi $x=7\cdot 8=56$, $y=7\cdot 9=63$.

Ats.: 56 ir 63.

6. Tegu x yra ieškomasis kėdžių skaičius. Pagal pirmąją sąlygą gauname lygybę $x=12m+k$; čia m ir k natūralieji skaičiai, $1\le k\le m-1$. Iš antrosios sąlygos gauname lygybę $x=26(m-7)+(m-10)$. Matome, kad turi būti $m\ge 11$.

Nagrinėdami lygybę $12m+k=26(m-7)+(m-10)$, gauname:

$$15m=192+k,$$

$$m = 12 + \frac{12+k}{15}. \qquad (1)$$

Kadangi $k \le m-1$, tai turi galioti nelygybė $15m = 192 + k \le$ $\le 192 + m - 1$. Iš čia gauname, kad $m \le \frac{191}{14}$; taigi $m \le 13$.

Iš šios sąlygos ir (1) formulės nustatome, kad $k = 3$ ir $m = 13$. Vadinasi, $x = 12 \cdot 13 + 3 = 159$.

Ats.: 159.

7. Tegu x yra grybų skaičius pirmame, o y – antrame krepšyje. Pagal uždavinio sąlygą $x + y > 27$, $x + 24 = 2y$ ir $x - 10 < y \le 9(x-10)$. Iš šių sąlygų gauname:

1) $y = \frac{x}{2} + 12$;

2) $x - 10 < \frac{x}{2} + 12 \le 9(x-10) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 10 < \frac{x}{2} + 12, \\ \frac{x}{2} + 12 \le 9(x-10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} < 22, \\ \frac{19x}{2} \ge 22 \end{cases} \Rightarrow \frac{44}{19} \le x < 44;$$

3) $x + y > 27 \Rightarrow x + \frac{x}{2} + 12 > 27 \Rightarrow x > 10$.

Taigi $10 < x < 44$. Gauname tokias x ir y poras $(x; y)$:

(12; 18), (14; 19), (16; 20), (18; 21), (20; 22), (22; 23), (24; 24), (26; 25), (28; 26), (30; 27), (32; 28), (34; 29), (36; 30), (38; 31), (40; 32), (42; 33).

Ats.: $2k$ ir $k + 12$; $k = 12, 13, ..., 21$.

8. Tegu r yra raudonų, o m – mėlynų pieštukų skaičius dėžutėje; dėžučių skaičių pažymėkime x. Pagal uždavinio sąlygą šiuos dydžius sieja tokie sąryšiai:

1) $m - r > 3$,

2) $3m - 2r \le 16$;

3) $(3m + 2r) \cdot x = 81$.

Iš pirmos nelygybės gauname sąlygą $m > r+3$, o iš antros – sąlygą $m \leq \frac{2r+16}{3}$; taigi skaičius m turi būti intervale $\left(r+3; \frac{2r+16}{3}\right]$. Skaičiai r ir m turi būti natūralieji, todėl nesunku rasti visas galimas skaičių r ir m poras $(r; m)$. Pavyzdžiui, pasirinkę $r=1$, gauname, jog $m \in (4; 6]$; todėl šiuo atveju turime dvi poras – (1; 5) ir (1; 6). Analogiškai randame ir kitas galimas poras: (2; 6), (3; 7), (4; 8).

Dabar pasinaudokime lygybe $(3m+2r)x = 81$. Iš jos matyti, kad skaičius 81 turi dalytis iš skaičiaus $3m+2r$. Šią sąlygą tenkina tik pora (3; 7).

Dėžučių skaičių x randame iš formulės $x = \frac{81}{3m+2r}$; jis yra lygus 3.

Ats.: 3 raudoni ir 7 mėlyni pieštukai; 3 dėžutės.

9. Tegu x yra studentų, gavusių dešimtukus, y – aštuonetus, z – šešetus, o t – ketvertus, skaičius. Pagal uždavinio sąlygą gauname tokius sąryšius tarp šių dydžių:

1) $x < z < y$;

2) $x = 2m$, m – natūralusis skaičius;

3) $y = 10k$, k – natūralusis skaičius;

4) $10x + 8y + 6z + 4t = 186$.

Įrašę $x = 2m$ ir $y = 10k$ į pastarąją lygybę ir suprastinę iš 2, gauname tokią lygtį (nežinomųjų m, k, z ir t atžvilgiu):

$$10m + 40k + 3z + 2t = 93.$$

Nesunku suprasti, kad k gali įgyti tik vieną reikšmę – lygią 1. Toliau nagrinėkime lygtį $10m + 3z + 2t = 53$. Nežinomieji m ir z turi tenkinti sąlygą $2m < z < 10$; be to, skaičius z turi būti nelyginis, o skaičius $t = \frac{53-10m-3z}{2}$ – natūralusis.

Tikrindami visas galimas m ir z poras $(m; z)$, gausime, kad

tinka tik viena – (1; 7). Taigi $x=2\cdot 1=2$, $y=10\cdot 1=10$, $z=7$, $t=\dfrac{53-10\cdot 1-3\cdot 7}{2}=11$.

Ats.: 2 dešimtukai, 10 aštuonetų, 7 šešetai, 11 ketvertų.

10. Bendras sužaistų partijų skaičius (todėl ir bendra taškų suma) yra $C_{24}^2=276$. Dalydami iš 14,5, gauname dalmenį 19 ir liekaną 0,5. Tai reikštų, kad 5 mokiniai iš viso turėtų vos pusę taško; bet taip būti negali, nes žaisdami tarpusavyje šie 5 mokiniai turi „pasidalyti" $C_5^2=10$ taškų. Vadinasi, po 14,5 taško galėjo surinkti mažiau kaip 19 mokinių. Ar galėjo 18 mokinių surinkti ne mažiau kaip po 14,5 taškų? Taip, nes $17\cdot 0{,}5+6=14{,}5$; aštuoniolika geriausių žaidėjų tarpusavyje visas partijas baigia lygiosiomis ir laimi prieš šešis silpniausius žaidėjus (visai nesvarbu, kokie yra šių šešių mokinių tarpusavyje sužaistų partijų rezultatai).

Ats.: 18.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kompleksinio skaičiaus $z_1=(x+y)^2-\dfrac{6}{i}-x$ algebrinė forma yra $z_1=(x+y)^2-x+6i$. Du kompleksiniai skaičiai z_1 ir z_2 yra lygūs, kai lygios jų realiosios ir menamosios dalys. Taigi $z_1=z_2$, kai

$$\begin{cases}(x+y)^2-x=-y-1,\\ 5(x+y)=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{6}{5}\right)^2-x=-y-1,\\ x+y=\dfrac{6}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y=\dfrac{61}{25},\\ x+y=\dfrac{6}{5}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{91}{50},\quad y=-\frac{31}{50}.$$

Ats.: $\left(\dfrac{91}{50};-\dfrac{31}{50}\right)$.

2. $$w=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{20}}{2^{10}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{20}}=2^{10}\frac{\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}}{\cos\frac{60\pi}{4}+i\sin\frac{60\pi}{4}}=$$

$$=2^{10}\frac{\cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos 15\pi+i\sin 15\pi}=2^{10}\frac{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}{-1}=$$

$$=2^{10}\frac{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}{-1}=-2^{10}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2^{9}\left(1-i\sqrt{3}\right).$$

Taigi $\operatorname{Re} w=2^9$, $\operatorname{Im} w=-2^9\cdot\sqrt{3}$, $\arg w=-\frac{\pi}{3}$.

Ats.: $\operatorname{Re} w=2^9$, $\operatorname{Im} w=-2^9\cdot\sqrt{3}$, $\arg w=-\frac{\pi}{3}$.

3. Sakykime, kad vektorių $\vec{a}$ reikia pasukti kampu α, kad gautume vektorių $\vec{b}$. Tada kompleksinį skaičių $4-3i$ daugindami iš kompleksinio skaičiaus $\cos\alpha+i\sin\alpha$ gauname:

$$(4-3i)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{2}}i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos\alpha+3\sin\alpha+i(4\sin\alpha-3\cos\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{2}}i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4\cos\alpha+3\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ 4\sin\alpha-3\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{4}.$$

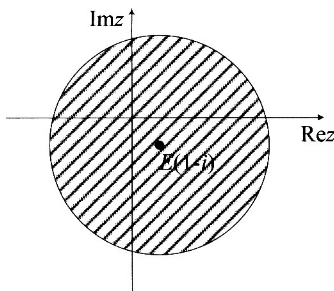
Ats.: $\frac{3\pi}{4}$.

4. Kadangi $\arg\bar{z} = -\arg z$, tai

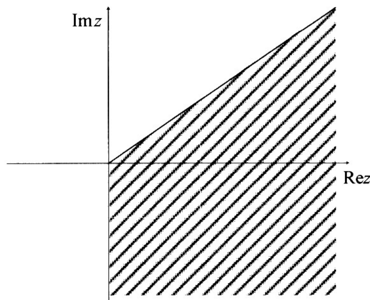
$$-\frac{\pi}{4} \le \arg\bar{z} \le \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{4} \le -\arg z \le \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2} \le -\arg z \le \frac{\pi}{4}.$$

Paveiksluose pavaizduotos plokštumos taškų, kurių kompleksinės koordinatės tenkina nelygybes:

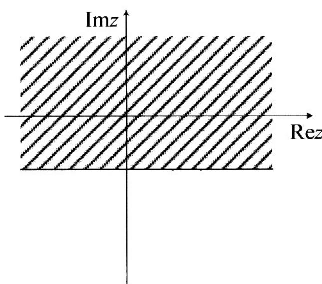
1) $|z-1+i| \le 4$; 2) $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$ ir 3) $\operatorname{Im} z \ge -2$, aibės.



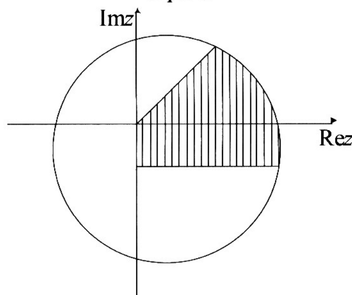
1 pav.



2 pav.



3 pav.



4 pav. (čia pavaizduota visų trijų aibių bendroji dalis)

5. $(1+i)^n = (1-i)^n \;\Rightarrow\; \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^n = 1 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^n = 1 \;\Rightarrow\; i^n = 1 \;\Rightarrow\; n = 4k,\, k \in \mathrm{N}.$$

Ats.: $n = 4k,\, k \in \mathrm{N}$.

6. Sakykime, kad $(z_1; z_2)$ – ieškomoji kompleksinių skaičių pora. Pagal uždavinio sąlygą $z_1 \neq z_2$ ir

$$\begin{cases} z_1^3 = z_2, \\ z_1 = z_2^3. \end{cases}$$

Iš sistemos pirmosios lygties z_2 išraišką įrašę į antrąją lygtį, gauname: $z_1^9 = z_1 \Rightarrow (z_1^8 - 1) \cdot z_1 = 0 \Rightarrow z_1^8 = 1$ arba $z_1 = 0$. Kai $z_1 = 0$, tai ir $z_2 = 0$. Pora $(0; 0)$ uždavinio sąlygos netenkina. Sprendžiame lygtį $z_1^8 = 1$. Gauname:

$$(z_1)_k = \sqrt[8]{1} = \sqrt[8]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{8} + i \sin\frac{2k\pi}{8} = \cos\frac{k\pi}{4} + i \sin\frac{k\pi}{4},$$

$k = 0, 1, 2, ..., 7.$

Turime aštuonis sprendinius:

$$(z_1)_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$(z_1)_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(z_1)_2 = \cos\frac{2\pi}{4} + i \sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$(z_1)_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(z_1)_4 = \cos\frac{4\pi}{4} + i \sin\frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$(z_1)_5 = \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(z_1)_6 = \cos\frac{6\pi}{4} + i \sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = -i,$$

$$(z_1)_7 = \cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4} - i \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Šias $(z_1)_k$ reikšmes įrašę į pirmąją lygtį, gauname:

$$(z_2)_0 = 1,$$

$$(z_2)_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(z_2)_2 = i^3 = -i,$$

$$(z_2)_3 = \cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(z_2)_4 = (-1)^3 = -1,$$

$$(z_2)_5 = -\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(z_2)_6 = (-i)^3 = i,$$

$$(z_2)_7 = -\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) = -\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tik poros $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(i; -i)$ ir $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tenkina sąlygą $z_1 \neq z_2$.

Ats.: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(i; -i)$ ir $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. Kadangi $32\,045 = 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29$, $5 = |2 + i|^2$, $13 = |2 + 3i|^2$, $17 = |4 + i|^2$ ir $29 = |5 + 2i|^2$, tai

$$32\,045 = |(2+i)(2+3i)(4+i)(5+2i)|^2 = |(1+8i)(4+i)(5+2i)|^2 =$$
$$= |(-4+33i)\cdot(5+2i)|^2 = |86 + 157i|^2 = 86^2 + 157^2.$$

Taigi $x = 86$, $y = 157$.

Ats.: $(86; 157)$.

8. Pagal Muavro formulę $(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x$. Kadangi

$$(\cos x + i\sin x)^4 = ((\cos x + i\sin x)^2)^2 =$$
$$= (\cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x)^2 =$$
$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 4i\sin x\cos x\,(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4\sin^2 x\cdot\cos^2 x =$$
$$= \cos^4 x - 6\sin^2 x\cdot\cos^2 x + \sin^4 x + 4i(\sin x\cos^3 x - \sin^3 x\cos x),$$

tai

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\sin^2 x\cdot\cos^2 x + \sin^4 x,$$
$$\sin 4x = 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x.$$

Ats.: $\cos 4x = \cos^4 x - 6\sin^2 x\cdot\cos^2 x + \sin^4 x,$

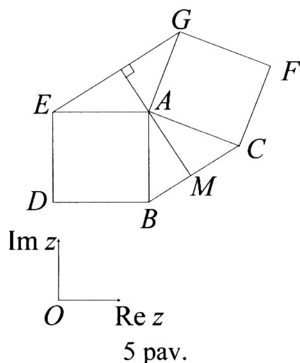
$\sin 4x = 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x.$

9. Lygties $z^2 + z + 1 = 0$ sprendiniai yra $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ir $z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Sakykime, kad $\alpha = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Tada

$$\alpha^3 = \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3} = 1,\quad \alpha^{999} = (\alpha^3)^{333} = 1,$$
$$\alpha^{666} = (\alpha^3)^{222} = 1,\quad \alpha^{66} = (\alpha^3)^{22} = 1 \text{ ir}$$
$$\alpha^{999} + 4\alpha^{666} + 5\alpha^{66} + 1998 = 1 + 4 + 5 + 1998 = 2008.$$

Ats.: 2008.

10. *1 būdas.* Sakykime, kad taškų A, B ir C kompleksinės koordinatės yra atitinkamai z_A, z_B ir z_C. Tada vektoriaus $\overrightarrow{AC}$ kompleksinė koordinatė yra $z_C - z_A$, vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ – $z_B - z_A$. Vektorius $\overrightarrow{AG}$ yra gautas vektorių $\overrightarrow{AC}$



5 pav.

pasukus $\frac{\pi}{2}$ kampu prieš laikrodžio rodyklę, todėl jo kompleksinė koordinatė yra $i(z_C - z_A)$. Vektorius $\overrightarrow{AE}$ yra gautas vektorių $\overrightarrow{AB}$ pasukus $\frac{\pi}{2}$ kampu pagal laikrodžio rodyklę, todėl jo kompleksinė koordinatė yra $-i(z_B - z_A)$. Kadangi $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE}$, tai vektoriaus $\overrightarrow{EG}$ kompleksinė koordinatė yra

$$z_{EG} = i(z_C - z_A) + i(z_B - z_A) = i(z_B + z_C - 2z_A).$$

Apskaičiuokime vektoriaus $\overrightarrow{AM}$ (M – atkarpos BC vidurio taškas) kompleksinę koordinatę. Kadangi $z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$, tai $z_{AM} = \frac{z_B + z_C}{2} - z_A = \frac{z_B + z_C - 2z_A}{2}$. Matome, kad $z_{EG} = 2i\, z_{AM}$. Taigi vektorius $\overrightarrow{EG}$ yra statmenas vektoriui $\overrightarrow{AM}$ ir dvigubai ilgesnis už jį, t. y. $EG = 2AM$.

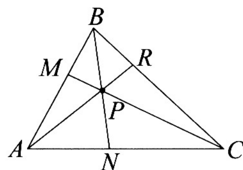
2 būdas. Koordinačių sistemą pasirenkame taip, kad koordinačių pradžia sutaptų su trikampio ABC viršūne A. Tada taško A kompleksinė koordinatė lygi 0. Taškų B ir C kompleksinės koordinatės z_B ir z_C sutampa su vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ koordinatėmis. Tada $z_{AG} = i z_C$, $z_{AE} = -i z_B$ ir $z_{AM} = \frac{z_B + z_C}{2}$.

Taigi $z_{EG} = 2i\, z_{AM}$. Vektorius $\overrightarrow{EG}$ yra statmenas vektoriui $\overrightarrow{AM}$ ir dukart ilgesnis už jį, t. y. $EG = 2AM$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pagal Čevos teoremą (1 pav.)

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CN}{NA}=1.$$



1 pav.

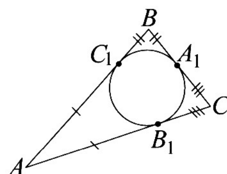
Iš čia $2\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{5}{4}=1$. Todėl $\frac{BR}{RC}=\frac{2}{5}$.

Ats.: $BR:RC=2:5$.

2. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę turime: $AB_1=AC_1$, $BC_1=BA_1$, $CA_1=CB_1$ (2 pav.). Todėl

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1;$$

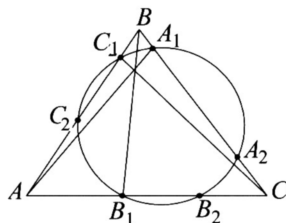
pagal Čevos teoremą tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške.



2 pav.

3. Tarkime, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške (3 pav.). Tuomet pagal Čevos teoremą $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$, o pagal apskritimo kirstinių savybes galioja lygybės

$$AC_1\cdot AC_2=AB_1\cdot AB_2,$$
$$BC_1\cdot BC_2=BA_1\cdot BA_2,$$
$$CB_1\cdot CB_2=CA_1\cdot CA_2.$$



3 pav.

Iš čia

$$\frac{AC_2}{AB_2}=\frac{AB_1}{AC_1},\quad \frac{BA_2}{BC_2}=\frac{BC_1}{BA_1},\quad \frac{CB_2}{CA_2}=\frac{CA_1}{CB_1}.$$

Todėl

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{AC_2}{B_2A}\cdot\frac{BA_2}{C_2B}\cdot\frac{CB_2}{A_2C}=\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=$$

$$=1\Big/\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Pagal Čevos teoremą išplaukia, kad tiesės AA_2, BB_2 ir CC_2 susikerta viename taške.

4. Sakykime, kad tiesė BK kerta trikampio kraštinę AC taške M (4 pav.). Tuomet trikampių BMC ir BMA, į kuriuos tiesė BK dalija trikampį ABC, plotų santykis lygus atkarpų CM ir MA santykiui.

Trikampiui ADC ir trims tiesės taškams B, K, M taikome Menelajo teoremą ir gauname lygybę

$$\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AK}{KD}\cdot\frac{DB}{BC}=1.$$

4 pav.

Pagal sąlygą $\frac{AK}{KD}=3$, $\frac{DB}{BC}=\frac{1}{2}$ (nes taškas D – kraštinės BC vidurio taškas); todėl $\frac{CM}{MA}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=1$ ir $\frac{CM}{MA}=\frac{2}{3}$.

Ats.: $S_{\Delta BCM}:S_{\Delta BMA}=2:3.$

5. Sakykime, kad atkarpos AE ir DF susikerta taške L (5 pav.). Trikampiui DFB ir tiesės taškams A, L, E taikome Menelajo teoremą; pagal ją

$$\frac{DL}{LF}\cdot\frac{FE}{EB}\cdot\frac{BA}{AD}=1.$$

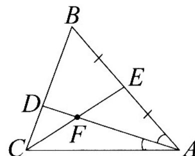
5 pav.

Kadangi $EB=\frac{1}{4}BC$, $BF=\frac{4}{5}BC$, tai $FE=BF-BE=\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{4}\right)BC=\frac{11}{20}BC$. Todėl $\frac{FE}{EB}=\frac{11}{5}$. Kadangi $\frac{BA}{AD}=\frac{5}{3}$, tai $\frac{DL}{LF}\cdot\frac{11}{5}\cdot\frac{5}{3}=1$ ir $\frac{DL}{LF}=\frac{3}{11}$.

Ats.: $DL:LF=3:11.$

6. Sakykime, kad pusiaukampinė AD ir pusiaukraštinė CE susikerta taške F (6 pav.). Trikampiui ABD ir tiesės taškams C, F, E taikome Menelajo teoremą ir gauname, kad $\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BE}{EA}=1$. Kadangi $\frac{BD}{DC}=\frac{2}{1}$, o taškas E – atkarpos AB vidurio taškas, tai $\frac{DC}{CB}=\frac{1}{3}$ ir $\frac{BE}{EA}=1$. Todėl $\frac{AF}{FD}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=1$ ir $AF:FD=3:1$.

Ats.: $AF:FD=3:1$.



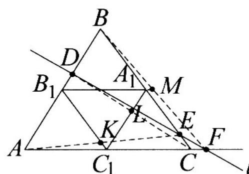
6 pav.

7. Atkarpos AE vidurio taškas K yra trikampio ABC vidurio linijoje (7 pav.), nes trikampio vidurio linija B_1C_1 yra atkarpų, jungiančių trikampio viršūnę A su kraštinės BC taškais, vidurio taškų aibė. Analogiškai taškas M yra vidurio linijoje A_1B_1, o taškas L – vidurio linijoje A_1C_1. Taigi nagrinėjame trikampį $A_1B_1C_1$, kurio viršūnės yra trikampio ABC kraštinių BC, CA ir AB vidurio taškai. Jo kraštinėse B_1C_1 ir A_1B_1 bei kraštinės A_1C_1 tęsinyje yra taškai K, L, M. Iš trikampių ABC ir AC_1B_1, ABE ir AC_1K, ACE ir AB_1K panašumo gauname, kad

$$\frac{C_1K}{KB_1}=\frac{BE}{EC}.$$

Analogiškai

$$\frac{B_1L}{LA_1}=\frac{AD}{DB},\quad \frac{A_1M}{MC_1}=\frac{CF}{PA}.$$



7 pav.

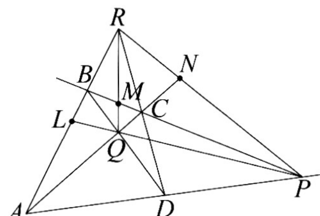
Taigi

$$\frac{C_1K}{KB_1}\cdot\frac{B_1L}{LA_1}\cdot\frac{A_1M}{MC_1}=\frac{BE}{EC}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{CF}{FA}=\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AD}{DB}=1,$$

nes taškai E, F, D yra vienoje tiesėje. Pagal Menelajo teoremą gauname, kad taškai K, L, M irgi yra vienoje tiesėje.

8. Tarkime, kad tiesės BC ir QR susikerta taške M, tiesės CA ir PR – taške N, o tiesės AB ir PQ – taške L (8 pav.). Trikampiui ABD ir dviejose jo kraštinėse bei trečiosios tęsinyje esantiems taškams L, Q ir P, priklausantiems vienai tiesei, taikome Menelajo teoremą; gauname, kad

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QB}\cdot\frac{BL}{LA}=1.$$



8 pav.

Analogiškai trikampiui BDC ir tiesės taškams Q, M, R gauname lygybę

$$\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DR}{RC}\cdot\frac{CM}{MB}=1,$$

o trikampiui DCA ir taškams R, N, P, esantiems jo kraštinės tęsiniuose, – lygybę

$$\frac{DR}{RC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PD}=1.$$

Iš pastarosios lygybės gauname lygybę

$$\frac{RC}{DR}\cdot\frac{NA}{CN}\cdot\frac{PD}{AP}=1$$

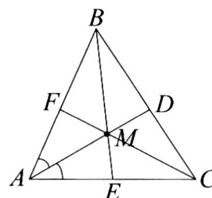
ir sudauginame ją su kitomis. Suprastinę gauname, kad

$$\frac{BL}{LA}\cdot\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CM}{MB}=1.$$

Kadangi taškai L ir N yra trikampio ABC kraštinėse, o taškas M – kraštinės tęsinyje, tai pagal Menelajo teoremą L, N ir M yra vienoje tiesėje.

9. Jei taške M susikerta trikampio ABC pusiaukampinės AD, BE ir CF (9 pav.), tai pagal van Obelio teoremą $\frac{AM}{MD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}$.

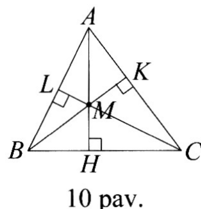
Bet $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$, $\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{CB}=\frac{b}{a}$; todėl $\frac{AM}{MD}=\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=\frac{c+b}{a}$.



9 pav.

Ats.: $AM : MD = (b+c) : a$.

10. Sakykime, kad trikampio ABC aukštinės AH, BK ir CL susikerta taške M ir $AM : MH = 1$ (10 pav.). Pagal van Obelio teoremą $\frac{AL}{LB}+\frac{AK}{KC}=\frac{AM}{MH}=1$. Kadangi $\frac{AL}{LB}=\frac{\text{ctg}\,\angle A}{\text{ctg}\,\angle B}$, $\frac{AK}{KC}=\frac{\text{ctg}\,\angle A}{\text{ctg}\,\angle C}$ (žr. 1 pavyzdį), tai $\frac{\text{ctg}\,\angle A}{\text{ctg}\,\angle B}+\frac{\text{ctg}\,\angle A}{\text{ctg}\,\angle C}=1$. Įrodysime, kad iš šios lygybės išplaukia įrodomoji tapatybė:



10 pav.

$$\frac{\text{ctg}\,\angle A}{\text{ctg}\,\angle B}+\frac{\text{ctg}\,\angle A}{\text{ctg}\,\angle C}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ctg}\,\angle A(\text{ctg}\,\angle C+\text{ctg}\,\angle B)=\text{ctg}\,\angle B\cdot\text{ctg}\,\angle C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\angle A}{\sin\angle A}\left(\frac{\cos\angle C}{\sin\angle C}+\frac{\cos\angle B}{\sin\angle B}\right)=\frac{\cos\angle B\cdot\cos\angle C}{\sin\angle B\cdot\sin\angle C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\angle A}{\sin\angle A}(\cos\angle C\cdot\sin\angle B+\cos\angle B\cdot\sin\angle C)=\cos\angle B\cdot\cos\angle C.$$

Kadangi

$$\cos\angle C\cdot\sin\angle B+\cos\angle B\cdot\sin\angle C=$$

$$=\sin(\angle B+\angle C)=\sin(180^\circ-\angle A)=\sin\angle A,$$

tai

$$\cos\angle A=\cos\angle B\cdot\cos\angle C.$$

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tikimybė, kad Antanas laimės prieš Juozą tris partijas iš keturių, lygi $p_4(3)=C_4^3\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}5^1=4\cdot 0{,}5^4=0{,}25$, o tikimybė Juozui laimėti prieš Antaną 5 partijas iš 8 yra

$$p_8(5)=C_8^5\cdot 0{,}5^5\cdot 0{,}5^3=C_8^3\cdot 0{,}5^8=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}5^8=0{,}21875.$$

Ats.: $p_4(3)>p_8(5)$.

2. Tikimybė, kad, metus monetą vieną kartą, atsivers herbas, lygi $\frac{1}{2}$.

Pažymėkime A įvykį, kad iš 4 metimų herbas atsivers ne mažiau kaip 3 kartus, B – įvykį, kad iš 8 metimų herbas atsivers ne mažiau kaip 5 kartus. Tuomet

$$P(A) = p_4(3) + p_4(4) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},$$

$$P(B) = p_8(5) + p_8(6) + p_8(7) + p_8(8) =$$

$$= C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 =$$

$$= \frac{1}{256}\left(C_8^3 + C_8^2 + C_8^1 + 1\right) = \frac{1}{256}(56 + 28 + 8 + 1) = \frac{93}{256}.$$

Kadangi $\frac{5}{16} = \frac{80}{256} < \frac{93}{256}$, tai $P(A) < P(B)$.

Ats.: $P(A) < P(B)$.

3. Tegu A – įvykis, kad iš 6 televizorių per garantinį laikotarpį remonto prireiks ne daugiau kaip vienam televizoriui, B – įvykis, kad iš šešių televizorių remonto prireiks bent vienam iš jų. Tuomet:

a) $$P(A) = p_6(0) + p_6(1) = C_6^0 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 + C_6^1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{5^6}(4096 + 6 \cdot 1024) = \frac{10240}{15625} \approx 0{,}655;$$

b) $$P(B) = 1 - p_6(0) = 1 - C_6^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{5^6 - 4^6}{5^6} = \frac{11529}{15625} \approx 0{,}738.$$

Ats.: a) $\approx 0{,}655$; b) $\approx 0{,}738$.

4. Mažiausią metimų skaičių, kad tikimybė pataikyti bent vieną metimą būtų 0,97, apskaičiuokime pagal formulę

$$N = \left[\frac{\ln(1-p)}{\ln q}\right] + 1; \; p = 0{,}97, \; q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Gausime $N = \left[\frac{\ln 0{,}03}{\ln 0{,}2}\right] + 1 = \left[\frac{-3{,}506}{-1{,}609}\right] + 1 = [2{,}179] + 1 = 2 + 1 = 3.$

Ats.: 3.

5. Pažymėkime A įvykį, kad mėtant monetą herbas pirmą kartą atsivers šeštuoju metimu. Tuomet $P(A) = q^{k-1} \cdot p$; čia $p = \frac{1}{2}$; $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $k = 6$.

Todėl $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \approx 0{,}016.$

Ats.: $\approx 0{,}016$.

6. Tikėtiniausią pavėlavusių keleivių (iš 855) skaičių rasime pagal formulę $k_0 = [(n+1)p]$. Kadangi $n = 855$, $p = 0{,}02$, tai $k_0 = [856 \cdot 0{,}02] = [17{,}12] = 17$.

Ats.: 17.

7. Tikėtiniausias paraiškų skaičius rytoj lygus $k_0 = [13 \cdot 0{,}3] = [3{,}9] = 3$. Apskaičiuokime tikimybę gauti 3 paraiškas:

$$p_{12}(3) = C_{12}^3 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^9 \approx \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}027 \cdot 0{,}0404 \approx 0{,}24.$$

Ats.: 3, $\approx 0{,}24$.

8. Pasinaudojus kavos aparatu n kartų, tikėtiniausia, kad jis „duos“ kavos $[(n+1)p]$ kartų; čia $p = 0{,}97$. Vadinasi, turime rasti natūralųjį skaičių n, su kuriuo $[(n+1) \cdot 0{,}97] = 100$. Gauname:

$$100 \le (n+1) \cdot 0{,}97 < 101 \Rightarrow 99{,}03 \le 0{,}97n < 100{,}03 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{99{,}03}{0{,}97} \le n < \frac{100{,}03}{0{,}97} \Rightarrow 102{,}09 \le n < 103{,}1 \Rightarrow n = 103.$$

Ats.: 103.

9. Tikimybę, kad iš 300 mokinių sėkmingai išlaikys egzaminą 149, apskaičiuokime pagal Muavro ir Laplaso teoremą:

$p_{300}(149) \approx \dfrac{f(x)}{\sqrt{npq}}$; $n = 300$, $k = 149$, $p = 0{,}7$, $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$,

$$x = \frac{149 - 300 \cdot 0{,}7}{\sqrt{300 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = -\frac{61}{\sqrt{63}} \approx -7{,}685,$$

$$f(-7{,}685) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-7{,}685)^2}{2}} \approx 0{,}399 \cdot e^{-29{,}53} \approx 5{,}97 \cdot 10^{-14}.$$

Taigi $p_{300}(149) \approx \dfrac{1}{63} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{-14} \approx 7{,}5 \cdot 10^{-15}$.

Ats.: $\approx 7{,}5 \cdot 10^{-15}$.

10. Pagal Muavro ir Laplaso teoremą gauname $p_{220}(110) \approx \dfrac{f(x)}{\sqrt{npq}}$;

$n = 220$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$,

$$x = \frac{110 - 220 \cdot 0{,}1}{\sqrt{220 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{88}{\sqrt{19{,}8}} \approx \frac{88}{4{,}45} \approx 19{,}8,$$

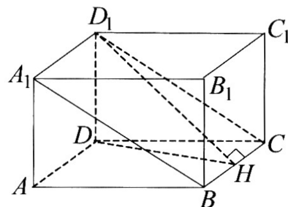
$$f(19{,}8) \approx 0{,}399 \cdot e^{-\frac{19{,}8^2}{2}} \approx 0{,}399 \cdot e^{-196} \approx 3{,}01 \cdot 10^{-86}.$$

Vadinasi, $p_{220}(110) \approx \dfrac{1}{4{,}45} \cdot 3{,}01 \cdot 10^{-86} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-87}$.

Ats.: $\approx 6{,}8 \cdot 10^{-87}$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad per gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (1 pav.) briaunas A_1D_1 ir BC einanti plokštuma sudaro su pagrindo $ABCD$ plokštuma $45°$ kampą. Nubrėžkime lygiagretainio A_1D_1CB aukštinę D_1H. Kadangi



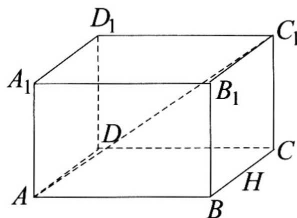
1 pav.

$D_1D \perp BC$, $D_1H \perp BC$; taigi pagal trijų statmenų teoremą $DH \perp BC$, t. y. $\angle DHD_1 = 45^\circ$. Pažymėkime $DD_1 = a$. Tuomet $DH = a$, $D_1H = a\sqrt{2}$. Kadangi D_1H yra lygiagretainio A_1D_1CB aukštinė, tai $BC = \dfrac{S_{A_1D_1CB}}{D_1H} = \dfrac{Q}{a\sqrt{2}}$. Kadangi $ABCD$ – rombas, tai $AB = BC = \dfrac{Q}{a\sqrt{2}}$. Visos gretasienio šoninės sienos yra lygios, o vienos sienos plotas lygus $a \cdot \dfrac{Q}{a\sqrt{2}} = \dfrac{Q}{\sqrt{2}}$. Todėl viso šoninio paviršiaus plotas yra $S = 4 \cdot \dfrac{Q}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}Q$.

Ats.: $2\sqrt{2}Q$.

2. Sakykime, kad gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (2 pav.) pagrindo $ABCD$ kraštinė AB lygi 4, kraštinė AD lygi 1, o kampas A lygus 60°. Tuomet pagrindo $ABCD$ plotas yra

$S = AB \cdot AD \sin 60^\circ = 4 \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.



2 pav.

Pagrindo įstrižainė AC ilgesnė už įstrižainę BD (patikrinkite patys, taikydami kosinusų teoremą). Kadangi ilgesnės atkarpos ortogonalioji projekcija yra ilgesnė, tai AC_1 – ilgesnioji gretasienio įstrižainė. Trikampiui ABC ($\angle ABC = 120^\circ$) pritaikę kosinusų teoremą randame:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ =$$
$$= 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 21.$$

Kadangi gretasienis statusis, tai $CC_1 \perp AC$. Iš stačiojo trikampio ACC_1 gauname: $CC_1^2 = AC_1^2 - AC^2 = 25 - 21 = 4$,

$CC_1 = 2$. Vadinasi, gretasienio tūris yra $V = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Ats.: $4\sqrt{3}$.

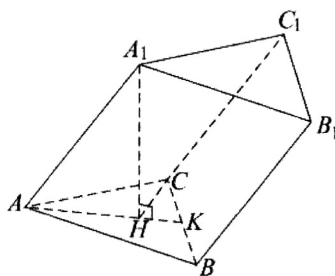
3. Sakykime, kad prizmės $ABCA_1B_1C_1$ (3 pav.) viršūnės A_1 ortogonalioji projekcija plokštumoje ABC yra taškas H – trikampio ABC centras (3 pav.). Kadangi prizmės pagrindo kraštinė yra $AB = 3\sqrt{3}$, tai pagrindo plotas

$$S = \frac{1}{2}AB^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

Kadangi $A_1H \perp AK$ (čia AK – trikampio ABC aukštinė), tai $\angle A_1AH = 60^\circ$; todėl

$A_1H = AH \cdot \mathrm{tg}60^\circ$.

Trikampio ABC aukštinė lygi $AK = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 27\sqrt{3}}{4 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{9}{2}$. Kadangi taškas H yra trikampio ABC centras,



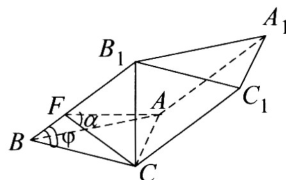
3 pav.

tai $AH = \frac{2}{3}AK = 3$. Taigi $A_1H = 3\mathrm{tg}60^\circ = 3\sqrt{3}$. Iš čia prizmės tūris

$$V = S \cdot A_1H = \frac{27\sqrt{3}}{4} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{243}{4}.$$

Ats.: $\frac{243}{4}$.

4. Pagal sąlygą tiesė B_1C yra statmena tiesėms CB ir CA (4 pav.), todėl iš stačiojo trikampio CBB_1 gauname $BC = l \cdot \cos\varphi$. Tiesės B_1B ortogonalioji projekcija prizmės pagrindo plokštumoje ABC yra tiesė BC. Tiesės AC ir BC statmenos, todėl pagal trijų statmenų teoremą tiesės AC ir B_1B taip pat statmenos. Nubrėžkime plokštumą,



4 pav.

einančią per tiesę AC ir statmeną tiesei B_1B; ši plokštuma briauną B_1B kerta taške F. Todėl trikampis ACF yra piramidės statmenais pjūvis ir (pagal sąlygą) $\angle AFC = \alpha$. Kadangi piramidės sienos BCC_1B_1 ir ACC_1A_1 yra statmenos, tai tiesės AC ir FC yra statmenos. Iš stačiojo trikampio FCB gauname $FC = BC \cdot \sin\varphi = l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$. Tuomet iš stačiojo trikampio FAC

$$AC = FC \cdot \mathrm{tg}\alpha = l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{tg}\alpha,$$

$$FA = \frac{FC}{\cos\alpha} = \frac{l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{\cos\alpha}.$$

Statmenojo pjūvio perimetras yra

$$2p = FA + AC + CF =$$

$$\frac{l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{\cos\alpha} + l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{tg}\alpha + l \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi =$$

$$= \frac{l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{\cos\alpha}(1 + \sin\alpha + \cos\alpha),$$

todėl šoninio paviršiaus plotas yra

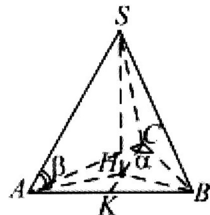
$$S = \frac{l^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{\cos\alpha}(1 + \sin\alpha + \cos\alpha).$$

Ats.: $\dfrac{l^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{\cos\alpha}(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$.

5. Sakykime kad piramidės $ABCS$ (5 pav.) aukštinė yra SH. Tuomet atkarpos AH, BH ir CH yra piramidės briaunų SA, SB ir SC ortogonaliosios projekcijos pagrindo plokštumoje. Pagal uždavinio sąlygą

$$\angle SAH = \angle SCH = \angle SBH = \beta.$$

Kadangi statieji trikampiai SAH, SBH ir SCH yra lygūs (jų statinis SH bendras, o smailieji kampai lygūs β), tai $AH = BH = CH$. Taigi taškas H yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Pagal sinusų teoremą



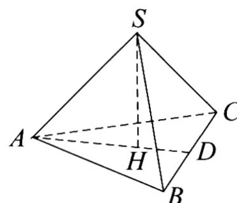
5 pav.

$\dfrac{CB}{\sin A} = 2AH$. Kadangi $CB = a$, $\angle A = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$,

tai $AH = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Iš stačiojo trikampio AHS randame $SH = AH\mathrm{tg}\beta = \dfrac{a\mathrm{tg}\beta}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Trikampio ABC plotas yra $S = \dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha$, todėl piramidės tūris yra $V = \dfrac{1}{3}S \cdot SH = \dfrac{a^3\mathrm{tg}\beta\sin\dfrac{\alpha}{2}}{6}$.

Ats.: $\dfrac{1}{6}a^3\mathrm{tg}\beta\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

6. Kadangi piramidė $ABCS$ – taisyklingoji, tai jos sienos ASB, BSC ir ASC yra lygūs statieji lygiašoniai trikampiai, o pagrindas ABC – lygiakraštis trikampis (6 pav.). Jei SD – piramidės apotema, tai taškas D yra kraštinės BC vidurio taškas. Pažymėkime $SA = SB = SC = a$. Tuomet $AB = BC = {}$ $= AC = a\sqrt{2}$. Pagrindo ABC plotas yra $Q = \dfrac{1}{2}AB^2\sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, todėl $a = \sqrt{\dfrac{2Q}{\sqrt{3}}}$, $AB = 2\sqrt{\dfrac{Q}{\sqrt{3}}}$. Iš stačiojo trikampio SDC randame apotemą



6 pav.

$$SD = \sqrt{SC^2 - CD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

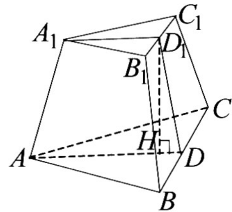
Tuomet piramidės šoninio paviršiaus plotas yra

$$S = \frac{3}{2}BC \cdot SD = \frac{3}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}a^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2Q}{\sqrt{3}}}\right)^2 = Q\sqrt{3}.$$

Ats.: $Q\sqrt{3}$.

7. Sakykime, kad kertančioji plokštuma eina per nupjautinės piramidės $ABCA_1B_1C_1$ briauną AA_1 ir pagrindo B_1C_1 vidurio

tašką D_1 (7 pav.). Kadangi trikampis $A_1B_1C_1$ – lygiakraštis, tai $A_1D_1 \perp B_1C_1$. Tegu plokštuma, einanti per taškus A, A_1 ir D_1, kerta pagrindo ABC plokštumą tiese AD. Tada tiesės AD ir A_1D_1 yra lygiagrečios; todėl $AD \perp BC$. Taigi pjūvio plokštuma yra statmena nupjautinės piramidės pagrindų plokštumoms, o pjūvis yra trapecija ADD_1A_1. Šios trapecijos aukštinė D_1H yra lygi nupjautinės piramidės aukštinei. Trapecijos ADD_1A_1 pagrindai AD ir A_1D_1 lygūs piramidės pagrindų aukštinėms:



7 pav.

$$AD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3},$$

$$A_1D_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Trapecijos plotas yra

$$S = \frac{1}{2}(AD + A_1D_1) \cdot D_1H,$$

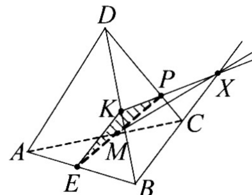
todėl (pagal sąlygą) $6\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) \cdot D_1H$. Iš čia $D_1H = 2$.

Taigi piramidės tūris yra

$$V = \frac{2}{3}\left(\frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{8^2 \cdot 4^2 \cdot 3}{4^2}}\right) = \frac{56}{3}\sqrt{3}.$$

Ats.: $\frac{56}{3}\sqrt{3}$.

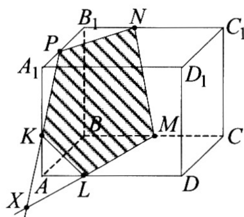
8. Sakykime, kad tiesių KP ir BC susikirtimo taškas yra X (8 pav.). Tuomet tiesės XE ir AC susikerta taške M. Keturkampis $KPME$ yra ieškomasis pjūvis.



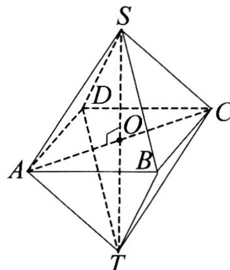
8 pav.

9. Sakykime, kad tiesės PK ir AB susikerta taške X (9 pav.). Tiesių XM ir AD susikirtimo taškas L yra viena iš pjūvio viršūnių. Sieną $A_1B_1C_1D_1$ pjūvio plokštuma kerta tiese,

lygiagrečia su tiese *ML*, todėl brėžiame $PN \| LM$, $N \in B_1C_1$. Penkiakampis *PKLMN* yra ieškomasis pjūvis.



9 pav.



10 pav.

10. Taisyklingąjį oktaedrą sudaro dvi taisyklingosios keturkampės piramidės, *ABCDS* ir *ABCDT*, kurių bendrasis pagrindas *ABCD* yra kvadratas, o šoninės sienos – lygiakraščiai trikampiai (10 pav.). Todėl oktaedro tūris lygus dvigubam piramidės *ABCDS* tūriui. Jei *SO* – šios piramidės aukštinė, tai taškas *O* yra kvadrato *ABCD* įstrižainių susikirtimo taškas. Vadinasi,

$$AO = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Todėl oktaedro tūris yra

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Ats.: $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
63	$\frac{128}{3}$	Taip	190



Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės ir tapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*

IX KNYGA

I. A. Urbonas. *Dirichlė principas.*
II. A. Apynis. *Neapibrėžtųjų koeficientų metodas.*
III. A. Apynis. *Sumavimas.*
IV. E. Tumėnaitė. *Logaritminės lygtys ir nelygybės.*
V. E. Mazėtis. *Geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai.*
VI. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Pilnosios tikimybės formulė.*
VII. E. Mazėtis. *Vektoriai erdvėje.*
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Progresijos.*